AARHUS UNIVERSITET

E L E M E N T Æ R   A F D E L I N G

Nr. 7.

LECTURES ON MODERN TEACHING OF GEOMETRY
AND RELATED TOPICS

by

H.Behnke, G.Choquet, J.Dieudonné,
W.Fenchel, H.Freudenthal, G.Hajós, G.Pickert

held at the ICMI-seminar in Aarhus
May 30 to June 2, 1960.

MATEMATISK INSTITUT

E L E M E N T Æ R A F D E L I N G

Nr. 7.

LECTURES ON MODERN TEACHING OF GEOMETRY AND RELATED TOPICS

by

H.Behnke, G.Choquet, J.Dieudonné,
W.Fenchel, H.Freudenthal, G.Hajós, G.Pickert

held at the ICMI-seminar in Aarhus
May 30 to June 2, 1960.

In January 1960 the President of the International Commission for Mathematical Instruction (ICMI), Marshall H. Stone, appointed a committee with the responsibility of organizing a seminar, to be held at the University of Aarhus, Denmark, with the purpose of advancing the study of the three topics to be discussed at the 1962 International Congress of Mathematicians in Stockholm:

1°. Which subjects in modern mathematics and which applications of modern mathematics can find a place in programs of secondary school instruction? (Reporter: J.G. Kemeny.)

2°. Education of the teachers for the various levels of mathematical instruction. (Reporter: K. Piene.)

3°. Connections between arithmetic and algebra in the mathematical instruction of children up to the age of 15. (Reporter: S. Straszewicz.)

The Organizing Committee consisted of the following members: H. Behnke, S. Bundgaard (chairman), J.G. Kemeny, K. Piene, O. Rindung, W. Servais and S. Straszewicz. Lektor E. Kristensen, University of Aarhus, served as Secretary of the Committee. Professor H. Behnke was appointed President of the seminar.

The Organizing Committee decided to concentrate most of the lectures and discussions on Modern Teaching of Geometry in secondary schools with particular emphasis on ways of treatment opened up by developments lately, in particular by the algebraization of mathematics. It also decided to publish the lecture manuscripts and summaries of the discussions in this report.

A general discussion of topics 1°, 2°, and 3° took place in three sessions of the seminar with introductory talks by S. Bundgaard (in the absence of J.G. Kemeny), K. Piene, and S. Straszewicz. Material from these sessions is not included in the report.

The seminar was supported by a grant from the International Mathematical Union for travelling expenses and grants from the Danish Mathematical Society, the University of Aarhus, and other Danish sources. The number of participants in the seminar was 30 coming from 10 European countries.

E. Kristensen has been in charge of the publication of the report; G. Grubb has assisted in preparing summaries of the discussions. The Mathematical Institute, University of Aarhus, has taken over the financial responsibility connected with the publication of the report and has included it as Number 7 in the series of publications from its Elementær Afdeling.

October 20, 1960

Svend Bundgaard.

I N D E X

-o0o-

LECTURES

and

DISCUSSIONS FOLLOWING THE LECTURES

by

H. Behnke

G. Pickert

J. Dieudonné

G. Choquet

W. Fenchel

G. Hajós

H. Freudenthal

FELIX KLEIN UND DIE HEUTIGE MATHEMATIK

von H. Behnke

Felix Klein hat in einem Masse wie selten ein Vertreter unseres Faches zwischen der Zeit seiner ersten Berufung im Jahre 1872 und dem ersten Weltkriege - also über 40 Jahre - mitten im wissenschaftlichen Leben gestanden. Er hat vor allem in jungen Jahren sehr viele eigene Untersuchungen veröffentlicht, die weit hinausstrahlten. Dabei hat er aber auch die wissenschaftliche Arbeit seiner Fachgenossen verfolgt und mit manchem zusammengearbeitet. Er war jedoch kein eifriger und aufmerksamer Leser. So hat er von Standts Begründung der projektiven Geometrie[1] - wie er selbst bekennt - nie gelesen, obwohl er sich häufig auf sie beruft und sie auch in einem wesentlichen Punkte (nämlich der Konstruktion der Gesamtheit der Punkte auf einer euklidischen Geraden) ergänzt. Für die Lektüre umfassender Werke war er zu ungeduldig. Da benötigte er einen Mittelsmann. Das war in diesem Falle Otto Stolz aus Innsbruck[2]. Als Klein sich mit Cayleys projektiver Massbestimmung und dazu mit seiner eigenen Interpretation als nicht-euklidischer Geometrie beschäftigte, liess er sich auch durch Stolz über die Werke von Bolyai und Lobatscheftsky berichten. Die Unterhaltungen, die sich solchen Gesprächen anschlossen, waren übersättigt von neuen Ideen, genau so wie die vielen Diskussionen mit Sophus Lie und mit Gordan, die sich über viele Jahre hinzogen und in den Arbeiten aller 3 Autoren ihren Niederschlag gefunden haben.

Klein war auch einer der Initiatoren der Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, eines gigantischen Rechenschaftsberichtes über die gesamten mathematischen Kenntnisse zu Beginn dieses Jahrhunderts. Mit zahllosen Autoren hat er wegen der Anlage eines Berichtes verhandelt. So stand die Arbeit von Felix Klein in intensiver Wechselwirkung mit dem ganzen mathematischen Geschehen seiner Zeit.

Das ist für die Nachwelt von besonderem Werte. Denn den grossen Überblick über das wissenschaftliche Schaffen in seinen Jahrzehnten, das er so gewann, hat er keineswegs nur für sich und seine eigene Arbeit benutzt. Seine allgemeinen Einsichten, in das was Mathematik ist und was die Mathematiker seiner Zeit erstrebten -

seien nun diese Ansichten mehr provisorischer oder mehr endgültiger Natur - hat er an manchen Stellen mit einer Offenheit dargestellt, die immer wieder Erstaunen und Respekt erweckt. Hierin war er Gauss ganz entgegengesetzt - aber auch von Weierstrass und Hilbert sehr verschieden.
Wir finden diese Konfessionen z.B. in den Bemerkungen zu seinen gesammelten Abhandlungen. Dort sind seine Originalarbeiten immer zu Gruppen zusammengefasst. Solchen Gruppen geht ein Kommentar von eigener Hand voraus, geschrieben inden letzten Lebensjahren 1921-1923. In behaglicher Breite wird über die sachliche Veranlassung zu den Arbeiten und den äusseren Umständen, unter denen die Arbeiten geschrieben sind, berichtet. Da finden wir selbst so subjektive Bemerkungen wie die, dass die Zeit 1876 - 1880 die glücklichste Zeit seiner mathematischen Produktion gewesen sei. Ausserdem wird es dem Leser leicht gemacht, die Arbeiten in das mathematische Gesamtgeschehen jener Zeit einzuordnen. Die vorangehenden und die folgenden Arbeiten fremder Autoren werden zu der eigenen Arbeiten in Beziehung gesetzt. Zwei andere Werke von Felix Klein sind in vielleicht noch grösserem Masse Bekenntnisse. Es sind dies:1. Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert.2 Bände. Geschrieben in der Zeit des 1. Weltkrieges. (Im Buchdruck 1926) (Fernerhin abgekürzt: Ent. d. Math.) 2. Elementarmathematik vom höheren Standpunkt aus. 3 Bände, 1.Auflage 1908. 3. noch selbstbesorgte Auflage 1924. (Hier zitiert als Elementarmath.)

In diesem Werken nimmt Klein zu allen wichtigen Fragen, die die Mathematik im 19. Jahrhundert bewegte, Stellung. Neben den sachlichen Schilderungen werden vielfach allgemeine Prinzipien zur Mathematik verkündet; Überzeugungen, für die er viele Mathematiker gewann und die sich bei ihm in vielen wechselseitigen Gesprächen mit seinen Zeitgenossen gebildet hatten.

So vertritt Felix Klein in seinen Werken eine Epoche der Mathematik und eine Generation von Mathematikern. Man kann diese Epoche etwa als die Zeit um die Jahrhundertwende bezeichnen oder genauer als die Zeit 1875-1914. Nach mathematischer Zeitbestimmung wird man sagen müssen: Das Vorhilbertsche Zeitalter. Das klingt ein wenig sonderbar, denn von 1895 bis 1925 haben beide gemeinsam in Göttingen gewirkt. Und Klein hat gerne Hilbert zitiert. Aber ganz verstanden hat er und seine Zeitgenossen Hilbert nicht mehr. Das ist glänzend von Freudenthal in seinem sehr bemerkenswerten Aufsatz: "Die Grundlagen der Geometrie um die Wende des 19. Jahrhunderts"[3] hervorgehoben.

Umso sinnvoller scheint es mir zu sein, sich zu bemühen, herauszuheben, was uns heutige Mathematiker von Klein und seiner Zeit unterscheidet und wieweit wir seine geistigen Erben sind. Dazu gibt es auch noch eine besondere Veranlassung. Ein angesehener englischer Gelehrte W.V.D. Hodge hat auf der Jahresveranstaltung der Mathematical Association of Great Britain 1955 in seiner Ansprache gesagt: "The tyranny af the Erlanger Programm has not yet finally disappeared but I am prepared to say that its days are numbered"[4]. Nun ist das Erlanger Programm 1872 von Felix Klein verfasst. Und diese Schrift hat nach Hodge lange Zeit eine Tyrannei ausgeübt und soll sie - nach seinem Urteil - jetzt also nach 88 Jahren noch ausüben.

Das Erlanger Programm sagt aus, dass eine Geometrie (wie etwa die euklidische, die beiden nicht-euklidischen, die projektive oder etwa die Topologie) ein System von Definitionen und Sätzen ist, das Eigenschaften ausdrückt, welche gegenüber einer Transformationsgruppe des jeweils betrachteten Raumes invariant sind. An diese Perspektive haben wir uns alle gewöhnt. Aber Klein hat in seiner Originalschrift von 1872[5] selbst betont: "Der hier aufgespannte Schematismus umspannt eben nicht die Gesamtheit mathematischer Forschung überhaupt, sondern er bringt nur gewisse Richtungen unter einem gemeinsamen Gesichtspunkt"[6]. Und auch der Titel jener Schrift bringt es noch einmal zum Ausdruck. Da heisst es <u>nicht</u>: Das fundamentale Prinzip des Aufbaues der Geometrie sondern unvergleichlich viel bescheidener: "Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen." Und über 40 Jahre später erläutert Klein dies noch einmal in seiner Darstellung der Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert. So schreibt er: "Das Erlanger Programm gehört zu denjenigen Schriften, welche zu Neuem anregen wollen, indem sie Vorhandenes ordnen. Ich habe es also immer sehr begrüsst, wenn weitere Anregungen hinzugetreten sind".[7] Und darauf spricht er von einer liberalen Doktrin (Das Wort natürlich aufgefasst im Sprachgebrauch der Zeit vor dem 1. Weltkrig), die an Stelle von Cayleys Ausspruch: "Descriptive geometry is all geometry".[8] getreten sei.

Ich kann in diesen Äusserungen keine Spur von geistiger Tyrannei entdecken und auch gewiss <u>nicht</u> die Behauptung: Das Erlanger Programm liefert die ganze Geometrie.

Trotzdem ist Hodge's Angriff im Kern nicht ungerechtfertigt. Es kann nur nicht Felix Klein selbst treffen, sondern ausschliesslich diejenigen, die das Erlanger Programm totgeritten und daraus eine Übungsaufgabe gemacht haben. Klein selbst hätte in seiner Liberalität und geistigen Aufgeschlossenheit für die mathematischen Gedanken anderer, den weiteren Ausführungen von Hodge lebhaft zugestimmt. Hodge weist in seinem Artikel nämlich weiter darauf hin, dass es ausser dem Erlanger Programm auch noch weitere geometrische Betrachtungen gibt, die sich nicht dem Erlanger Programm unterordnen lassen. Solchen Erwägungen soll hier auch nachgegangen werden. Es ist wichtig, dass man sich die Grenzen des Erlanger Programmes innerhalb der Geometrie bewusst ist. (Gerade bei der älteren Generation ist dies leicht nicht der Fall).

Das erste Beispiel, das Hodge erwähnt, betrifft die birationalen Transformationen. Im projektiv abgeschlossenen 3-dim. Raum mit den homogenen Koordinaten x_1, x_2, x_3, x_4 seien 2 algebraische Flächen $F(x_1, x_2, x_3, x_4)=o$ und $\Phi(x_1, x_2, x_3, x_4)=o$ gegeben. $F=o$ und $\Phi=o$ heissen birational äquivalent, wenn die Punkte von F alles Bilder *) $x_i'=f_i(x_1, x_2, x_3, x_4)$ $i=1,\ldots,4$ werden, wobei die f_i homogene Polynome gleichen Grades auf Φ sein sollen (also insbesondere: $F(f_1, f_2, f_3, f_4)= \Phi(x_1, x_2, x_3, x_4,)$ Entsprechendes soll für die inverse Abbildung von F auf Φ gelten. Dabei braucht die ein-eindeutige Abbildung von F auf Φ nicht unbegrenzt in den umgebenden Raum fortgesetzt werden können. Die Ein-eindeutigkeit der Abbildung ist unter Umständen nur unter Berücksichtigung der Gleichungen $F=o$ und $\Phi=o$ gewährleistet. Soweit also F und Φ als Teilmengen des euklidischen Raumes betrachtet werden, fällt diese Abbildung nicht unter das Erlanger Programm. Denn dort wird verlangt, dass jede der Transformationen im betrachteten Raum umkehrbar ist, damit die Gesamtheit der Transformationen eine Gruppe bilden. Und Hodge hat Recht, wenn er sagt, die birationalen Transformationen sind das Fundament der algebraischen Geometrie. Doch das ist erstaunlich. Diese Einsicht hat Klein selbst schon gehabt. Man beachte nur in der Originalschrift

*) der Punkte von Φ mittels Transformationen.

von Felix Klain vom Jahre 1872 p. 29 die ersten beiden Abschnitte unter 1: Die Gruppe der rationalen Umformungen. Hat Hodge etwa die Originalschrift nicht einsehen können?

Was Hodge aber dann weiter an Beispielen aus der Geometrie anführt, die nicht unter das Erlanger Programm fallen, hat Klein in seiner heutigen Bedeutung noch nicht kennen können. Dazu gehört vor allem das Studium von abstrakten Gebilden, die mit einer speziellen Struktur belegt sind.

Greifen wir, um das zu erläutern, die Frage der Einbettbarkeit von differenzierbaren Mannigfaltigkeiten heraus, etwa: Wann kann eine differenzierbare Mannigfaltigkeit in einem genügend hochdimensionalen Raum eingebettet werden? Ein Hausdorffscher Raum heisst eine differenzierbare Mannigfaltigkeit M^n der Dimension n, wenn die Umgebungen U unter den folgenden Bedingungen ein-eindeutig in den offenen euklidischen Raum R^n abgebildet werden können. Denkt man an die inverse Abbildung, so bekommen die Punkte P aus einer solchen Umgebung lokale Koordinaten $x_1,\ldots,x_n$. Haben nun U_1 und U_2 auf M^n einen Durchschnitt D gemeinsam, so werden bei der Abbildung von U_1 in den R^n und der Abbildung von U_2 in den R^n Bilder D_1 und D_2 erzeugt. Als Verträglichkeitsbedingung wird in jedem solchen Falle gefordert, dass D_1 und D_2 durch eine (natürlich ein-eindeutige) stetig differenzierbare Transformation $x_i=\varphi_i(y_1,\ldots, y_n)$, $i=1,\ldots,n$ aufeinander bezogen sind. Gegebenenfalls wird mehrmalige (g-malige) Differenzierbarkeit gefordert. Die interessante Frage nach der Einbettbarkeit einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit in einen euklidischen Raum R^m ist von H. Whitney in einer Reihe berühmter Arbeiten gelöst.[10)] Für m gibt er 2n+1 an.

Statt 1 x differenzierbare Mannigfaltigkeiten können ebenso g-mal differenzierbare Mannigfaltigkeiten betrachtet werden. Und auch ihre Einbettbarkeit, von der natürlich nun befordert wird, dass die Gleichungen in R^m auch g-mal differenzierbar sind, wird nachgewiesen.

Wird auf der differenzierbaren Mannigfaltigkeit eine quadratische Form vorgegeben, so kommt man zur Riemannschen Geometrie, die vor allem mit der Relativitätstheorie im letzten Jahrzehnt von Kleins Leben entwickelt wurde. Hodge rechnet die Riemannsche Geometrie nicht unter das Erlanger Programm. Er hat insofern recht, als es im allgemeinen in einem Raum der Riemannschen Geometrie keine Transformationsgruppe gibt, die transitiv ist

(2 vorgegebene Punkte in einander überführt) und dabei die quadratischen Formen von Original- und Bildpunkt in einander überführt (die Längen bei der Abbildung erhält). Aber andererseits hat ja gerade die Forderung, die Invarianten gegenüber beliebigen Koordinatentransformationen aufzustellen, zum Ricci-Kalkül geführt, durch den die Riemannsche Geometrie beherrscht wird. Das scheint mir eine sehr fruchtbare Entwicklung gewesen zu sein. Es ist wahr, dass die Riemannsche Geometrie - ganz roh gesprochen - nur noch Übungsaufgaben frei liess. Aber ist da nicht das Schicksal jeder voll entwickelten mathematischen Theorie?

Eine noch grössere Rolle als die differenzierbaren Mannigfaltigkeiten spielen in der heutigen Mathematik die komplexen Mannigfaltigkeiten M^n. Wird ein Hausdorffscher Raum ganz analog wie oben lokal auf den Raum C^n von n komplexen Veränderlichen bezogen, so dass die Bilder der Durchschnitte im C^n holomorphe Bilder voneinander sind (für n=1 also konforme Bilder), so spricht man von einer komplexen Mannigfaltigkeit. 11). In jeder dieser Umgebungen gibt es also komplexe Koordinaten $z_1, \ldots, z_n$. Für n=1 sind dies die abstrakten Riemannschen Flächen, die schon in Kleinschen Arbeiten vielfach auftreten. Auch bei ihnen tritt die Frage der Einbettbarkeit auf. Diese Riemannschen Flächen sind zunächst mittels einer nicht konstanten meromorphen Funktion - die bekanntlich in den Arbeiten von Felix Klein, Henri Poincaré und Paul Koebe schon konstruiert wird - zu konkretisieren (die z-Ebene zu überlagern). Dann ist aus der algebraischen Geometrie bekannt, dass sich jede kompakte Riemannsche Fläche durch eine biholomorphe Abbildung auf eine singularitätenfreie analytische Menge in P^3 beziehen lässt. (P^3 ist dabei der dreidimensionale projektive Raum über dem Körper der komplexen Zahlen Z. Für nicht kompakte-Riemannsche Flächen ist die Einbettung schwerer durchzuführen und nur, wenn P^N eine genügend hohe Dimension hat. Andererseits ist heute für alle komplexen Mannigfaltigkeiten M^n (mit beliebig grossem n) diese Einbettbarkeit bewiesen 12). Diese sehr interessanten Fragen gehören der geometrischen Funktionentheorie an.

Ganz eng damit zusammen hängen aber die Fragen der komplexen Topologie - zweifellos eines Teiles der Geometrie. Die komplexe Topologie ist eines der neuesten Gebiete der Mathematik. Sie begann mit der folgenden Frage: Gegeben sei eine Sphäre (also eine Kugeloberfläche) der reellen Dimension n. Wann ist sie lückenlos als komplexe Mannigfaltigkeit auffassbar? Sicher gilt dies für die S^2, bei der ja die stereographische Projektion eine komplexe Struktur liefert; sicher gilt es nicht für die S^k, k ungerade. Heute wissen wir, dass es für alle S^k, $k \neq 2,6$ nicht gilt. 13) Die Frage, ob die S^6 eine komplexe Struktur tragen kann (also als komplexe Mannigfaltigkeit auffassbar ist) ist noch unbekannt.

Liest man die Arbeiten der Göttinger aus der Zeit der Jahrhundertwende (also vor allem von Klein und Hilbert), so stösst man immer wieder auf die Vermutung, dass, was für den R^3 richtig ist, auch für den R^n, $n > 3$ gilt und was für den C^2 gilt, auch richtig ist für den C^n, $n > 2$. In der komplexen Topologie hat man nun gelernt, dass dies keinesfalls zutrifft, z.B. 1. Die S^n in R^{n+1} ist parallelisierbar für n=1,3,7 und höchstens parallelisierbar, wenn n+1 eine Potenz von 2 ist. Oder 2. Klassifikation der beschränkten Gebiete des C^n, die homogen und symmetrisch bezüglich ihrer Automorphismengruppe sind. Man braucht sich dabei nur mit irreduziblen Gebieten, d.h. solchen, die nicht cartesiche Produkte von niederdimensionalen, homogenen, symmetrischen, beschränkten Gebieten sind, befassen. Dann spielen C^{16} und C^{27} eine erstaunliche Ausnahme, wie zuerst Elie Cartan bemerkt hat. 16) Oder 3. Es sei M^n eine kompakte, orientierte, differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension n. Dann gilt nach Thom: Jede M^1, M^2, M^3, M^6, M^7 berandet. Jede M^4 ist einem ganzzahligen Vielfachem der komplexen projektiven Ebene äquivalent. 17)

So kommen wir mit den Ausnahmen der Göttinger nicht mehr aus. Dazu sind unsere Aussagen zu verfeinert. Seit etwa 30 Jahren findet man auch keine Arbeiten mehr, die nur Untersuchungen für 2 komplexe Veränderliche durchführen, aber im Titel und in der Einleitung beanspruchen, für Funktionen von beliebig vielen komplexen Veränderlichen zu gelten.

Die beherrschende Disziplin der Geometrie ist heute die Topologie. Als Klein das Erlanger Programm schrieb, war sie erst in den Anfängen. Und sie passte in ihrer damaligen Gestalt gut in dies Programm hinein, nämlich als die Theorie der Invarianten gegenüber ein-eindeutigen und stetigen Transformationen. Klein selbst hat diese Auffassung der Topologie auch betont. Doch ihre Wichtigkeit konnte er damals unmöglich abschätzen. In seinen späteren Arbeiten und Büchern ist dann die kombinatorische Topologie - d.i. die Lehre von den Zusammenhängen im Grossen, hierher gehört z.B. der Begriff des Geschlechtes einer Fläche - zu ihrem vollen Rechte gekommen.

Anders die punktmengentheoretische Topologie, deren Entwicklung erst voll mit den Hausdorffschen Räumen 1912 beginnt. Im modernen Aufbau von Bourbaki gehört sie zu den grundlegenden Strukturen, die wir jetzt die Mutterstrukturen nennen. Neben den algebraischen und Ordnungsstrukturen tritt da nur eine weitere, eine geometrische Struktur auf. Als solche kann man die Hausdorffschen Umgebungsaxiome wählen. Hierauf kann dann u.a. die ganze Analysis und damit auch über die analytische Geometrie, die euklidische Geometrie, die Differentialgeometrie u.s.w. aufgebaut werden. Dabei ist aber der Umweg über die reelle Analysis durchaus nicht nötig, sondern nur uns am vertrautesten. Hodge versucht unverbindlich neu zu definieren, was Geometrie ist und schlägt vor: Ein Hausdorffscher Raum mit weiteren (etwa algebraischen) Struktureigenschaften. 18) Das ist im Sinne von Bourbaki durchaus vernünftig.

Klein hat m.W. die Hausdorffschen Räume niemals mehr erwähnt, obwohl er vorbereitend zu ihrer Entwicklung auch etwas beigetragen hat. Er hat ja bemerkt, dass im Aufbau der projektiven Geometrie nach von Staudt ein Stetigkeitsaxiom fehlt. 18a) Allerdings hat er es nicht richtig formulieren können, vielleicht auch gar nicht gewollt, weil er im Aufbau der euklidischen Geometrie bzw. auch der projektiven Geometrie die Zahlengerade aufnahm. Hilberts autonome Begründung der Geometrie hat er offenbar nicht mehr erfasst. Selbst in der Neuauflage der Elementargeometrie von 1908 nimmt er davon keine Notiz, obwohl er Hilberts Grundlagen der Geometrie, die 1899 zuerst erschienen in seiner Elementargeometrie schildert. Aber die grosse Wandlung, die damit die Auffassung, von dem was Geometrie ist, erfuhr, hat er nie ganz verstanden. Sagte Hilbert: Sie mögen sich unter Punkten, Geraden, Ebenen beliebige Dinge vorstellen - wichtig ist nur, dass sie einem widerspruchslosen, lückenlos aufgezählten System von Axiomen genügen; so wehrt sich Klein ganz entschieden dagegen, dass die Objekte der Geometrie nur Idealgebilde seien und dass man mit den Axiomen bei Beachtung der logischen Gesetze beliebig schalten könne. Bei der Besprechung der Grundlagen der Geometrie sagt er: "Die Axiome über die Punkte, Geraden, Ebenen sind an die Spitze zu stellen - was dies für Dinge sind, muss jeder vorher wissen". 19)

Im selben Band heisst es an einer anderen Stelle: "Grundbegriffe und Axiome sind nicht unmittelbare Tatsachen der Anschauung, sondern zweckmässig gewählte Idealisierungen dieser Tatsachen." 20). Klein wendet sich dann heftig gegen die These: "Die Axiome seien nur Sätze, die wir ganz freiwillig aufstellen und die Grundbegriffe schliesslich ebenso nur willkürliche Zeichen für Dinge, mit denen wir operieren." 21). Er setzt ausdrücklich hinzu: "Ich teile diesen Standpunkt nicht und halte ihn für den Tod der Wissenschaft."

Die Anschauung ist nach Klein auch in der Mathematik eine Realität. Dabei gibt es nach ihm 2 Arten von Anschauungen: 22)
1. Die empirische Anschauung, die durch Messen festgelegt wird.
2. Die idealisierende innere Anschauung.

Über die empirische Anschauung verständigt man sich leicht. Hier handelt es sich um Einsichten über den physikalischen Raum. Etwa die Aussage, dass die Winkelsumme eines Dreiecks, das von Lichtstrahlen gebildet wird - wie Gauss sie mass, als er das Dreieck: Brocken, Hohen Hagen, Inselsberg ausmass - 180° beträgt. Aussagen aus der angewandten Mathematik, die die phänomenologische Welt betreffen und uns völlig geläufig sind, werden zur empirischen Anschauung gerechnet.

Die 2. Art von Anschauung, die Klein meint, ist viel schwerer zu fassen. Nicht nur Aussagen aus der Geometrie sondern auch solche aus der elementaren Arithmetik können nach Klein anschaulich sein. So schliesst er in die Anschauung mit ein das unbestimmte Gefühl, welches der geübte Zahlenrechner besitzt über die Konvergenz unendlicher Prozesse. 23).

Streng fassen lässt sich dieser Begriff der Anschauung nicht. Das wusste selbstverständlich Klein auch schon. So ist er - im Gegensatz zu den Philosophen seiner Zeit - sehr vorsichtig bezüglich des Parallelenaxioms. Er behauptet keineswegs, wie es zu seiner Zeit noch verbreitet war, dass die euklidische Geometrie sich zwangsweise aus der Anschauung ergibt. Im Gegenteil! Er ist ja schon ein Verfechter der Gleichberechtigung nicht-euklidischer Geometrien. Andererseits würde Klein viele Teile der heutigen Mathematik als unanschaulich bezeichnen. Bekannt ist von ihm, dem Förderer der Gruppentheorie, dass er die heute üblichen Definitionen der Gruppe und das Operieren mit diesem allgemeinen Begriff der Gruppe als unanschaulich, zu abstrakt und mathematisch nicht förderlich ansah. 24) Dabei erforschte und lehrte er Transformationsgruppen wie auch die ganz anders gearteten Permutationsgruppen. Wenn Klein schon gegen den Begriff der abstrakten Gruppe auftrat, wie würde er erst die moderne Algebra mit ihren Begriffen von Ringen, Idealen und Körpern ablehnen. Zu seiner Zeit war der Begriff des Zahlkörpers allgemein anerkannt. Der Hilbertsche Zahlbericht von 1894 hatte allgemeine Anerkennung gefunden. Dabei ist ein Zahlkörper ein algebraischer Körper über dem Körper der rationalen Zahlen. Die heute in jeder Vorlesung gebräuchlichen abstrakten Begriffe bauen auf der fundamentalen Arbeit von E. Steinitz auf, die 1908 erschien, deres Wichtigkeit jedoch erst später erkannt wurde.

Die neue Entwicklung der Algebra beginnt dann mit Emmy Noether, Artin und van der Waerden. Darauf folgen in ununterbrochener Reihe die Arbeiten der zahlreichen Algebraiker, die es heute gibt. Die Algebra ist heute ein sehr modernes, abstraktes und viel bearbeitetes Gebiet geworden. Keineswegs kann man sie heute nur noch als die Lehre von der Auffindung von Wurzeln der Polynome ansehen. Das ist jetzt nur noch ein Ausschnitt der ganzen Theorie.

Emmy Noether, die ja noch im Schatten von Felix Klein aufwuchs, - sie war sogar noch 7 Jahre Dozentin in Göttingen, während der alte Geheimrat dort noch lebte - und in seiner noblen aber bestimmten Art auch durchaus bemerkbar in das mathematische Leben eingriff - hat ihre Art, die Algebra aufzufassen, fest und sicher verteidigt und von einer "abstrakten Anschauung" gesprochen, die sie leite. Die Auswirkung dieser "abstrakten Anschauung" war jederzeit zu bemerken. Umso schwerer aber ist es, genau zu formulieren, was damit gemeint ist. Es ist eine Art Überschau über das beherrschte Gebiet, die sich so auswirkt wie die räumliche Anschauung beim Studium der Elementargeometrie.

Zur Zeit Kleins hätte man die Bezeichnung "abstrakte Anschauung" in der modernen Algebra als einen Missbrauch des Wortes Anschauung angesehen. Aber Kleins Weigerung, abstrakte Gruppen zu lehren und ihr Studium für fruchtbar zu halten, kann nicht als ein endgültiges Urteil angesehen werden. Hätte er 30 Jahre später gelebt, so hätte er darüber anders gedacht. Sein glänzendes Anschauungsvermögen im euklidischen Raum - wie entsetzt wäre man in der voreinsteinschen Zeit über diesen Zusatz gewesen, als wenn es einen "realen" Raum ausserhalb des euklidischen gäbe, hätte man tadelnd gesagt - das ihm vor allem in der Jugend viele Erfolge einbrachte, machte es ihm im Alter schwer, die neue abstrakte Algebra zu verstehen. Die Jugend fasst immer neue Begriffe viel leichter auf als das erfahrene Alter. Was hätte Klein wohl gesagt, wenn ihm der Begriff des Vektors, wie er heute üblich ist, algebraisch und nicht mehr an den 3-dim. euklidischen Raum gebunden, vorgetragen würde! Seine Ablehnung wäre wohl noch heftiger als beim Gruppenbegriff gewesen. Für Kleins Generation war der gebundene Vektor eine gerichtete Strecke der euklidischen Geometrie und der freie Vektor die Klasse der durch Parallelverschiebung aus einem gebundenen Vektor hervorgehenden Vektoren. Also der freie Vektor wurde in einem Cartesischen Koordinatensystem durch seine Koordinaten a_i gegeben, mit denen in bekannter Weise zu rechnen ist. (Ja, gelegentlich wurde ein Vektor definiert als ein Tüpel von Zahlen, das einem festen Cartesischen Koordinatensystem zugeordnet ist und das bei orthogonalen Transformationen wie Koordinatendifferenzen transformiert wird. 25).

Heute wird zunächst der Vektorraum definiert. 26). Eine Menge von Dingen a,b,.... heisst Vektorraum, wenn sie

I. eine additiv geschriebene Abelsche Gruppe bilden

II. es einen Operatorenbereich, nämlich einen Körper von Elementen λ, μ, ν, ... gibt, dessen Elemente so mit den Elementen der Gruppe verknüpft werden können, dass

1. $\lambda(\mu a) = (\lambda\mu)a$
2. $\lambda(a+b) = \lambda a + \lambda b$
3. $(\lambda+\mu)a = \lambda a + \mu a$
4. $1\cdot a = a.$

1 soll dabei die Einheit des Körpers sein.

Die Elemente des Vektorraumes heissen Vektoren. Hier wird also der Vektor genau so eingeführt wie der Punkt in der euklidischen Geometrie. Zunächst wird durch die Euklid-Hilbertschen Gesetze der Raum definiert. Die einzelnen Elemente sind dann die Punkte.

Alle anderen bekannten Begriffe des Vektors sind Spezialfälle hiervon. Wer heute Algebra erlernt, weiss selbstverständlich mit diesem Begriff des Vektors umzugehen. Ich weise dazu nur auf die heute allgemein verbreiteten Standardbücher hin und zwar 1. auf das ältere Werk: v.d. Waerden, Algebra, 2. auf das neue Werk: N. Bourbaki, Elements de mathematiques.

So wie sich schon der Begriff der allgemeinen Gruppe in den letzten Lebensjahren von Klein ganz selbstverständlich durchsetzte, so ist es in den 50 er Jahren auch mit dem vorgeführten Begriff des Vektors gegangen. Die Jugend weiss es nicht mehr anders und weiss dennoch mit dem Begriff des Vektors im euklidischen Raum, wie er etwa in der Physik gebraucht wird, nicht weniger umzugehen als die Jugend zu Zeiten des alten Klein. Im Gegenteil! Damals wurde selbst der Begriff des Vektors im R^3 nicht so konsequent gebraucht wie heute. Das zeigen die Werke über Differentialgeometrie aus jenen Tagen. Bei der Lektüre der dort auftretenden 3-Formelsysteme hat man den Eindruck, die Vektorrechnung sei noch nicht entdeckt. Mir scheint - und das sage ich ausdrücklich für die Schulleute der älteren Generation - dass man Klein nicht anführen kann, wenn man gegen die Entwicklung der Mathematik in den letzten Jahrzehnten Stellung beziehen will.

Kleins Eintreten für die Anschaulichkeit war unüberhörbar, aber doch begrenzt. Er wusste wie es um ihre Ungenauigkeit stand. In seinen Vorbemerkungen in Band II erinnert er gerade an diese Ungenauigkeit. 27). Er weist auf die überall stetigen Kurven hin, die nirgends einen Differentialquotienten haben. Weierstrass hatte ja solche Kurven konstruiert. Und ebenso denkt Klein an die Berechtigung der nicht-euklidischen Geometrie, für die er ja das Klein-Cayleysche Modell konstruiert hatte.

Im selben Bande sagt er auch: "Bei den Lehrern unserer Gymnasien wird die Notwendigkeit eines an die Anschauung anschliessenden mathematischen Unterrichtes vielfach so stark betont, dass man gezwungen ist, zu widersprechen und umgekehrt die Notwendigkeit eingehender notwendiger logischer Entwicklungen zu verlangen." 28). Ich meinerseits möchte diesen Worten von Klein hinzufügen: Bei didaktischen Vorträgen erscheint es mir manchmal so, als würde durch ein unnatürliches Hinzuziehen geometrischer Interpretationen der mathematische Sachverhalt nur verdunkelt. Logische Gedankengänge sind manchmal viel leichter erfassbar als anschauliche geometrische Konstruktionen. Das gilt auch schon für den älteren Schüler. Es ist ganz gewiss nicht die gesamte Mathematik in anschaulich elementar-geometrischen Betrachtungen aufzulösen, wohl aber die ganze Mathematik samt Geometrie auf Axiome und triviale logische Schlüsse (allerdings in möglicherweise unüberschaubarer Zahl) reduzierbar.

Klein hat neben der Pflege der Anschauung die Fusion als allgemeines Prinzip des mathematischen Unterrichtes stark unterstrichen. Besonders bekannt ist in Schulkreisen seine Forderung: Elementargeometrie nicht nur in der Ebene sondern zugleich auch im Raume zu treiben. Aber sein Fusionsprinzip war viel umfassender. Alle Teile der Mathematik sollten miteinander verwoben werden. Vor allem aber ging es ihm um die Verbindung von Analysis und Geometrie, um dadurch neue Erkenntnisse zu gewinnen. Seine eigenen wissenschaftlichen Erfolge sind dieser Zusammenschau unserer gesamten Wissenschaft zu erklären.

Entsprechendes gilt für die Algebra. Da schreibt er einmal: "Alle meine algebraischen Darlegungen werden sich um einen Punkt gruppieren. Die Anwendung der graphischen und der geometrisch anschaulichen Methoden auf die Lösung von Gleichungen." 29). Das steht zwar "nur" in der Einleitung zur zweibändigen Elementargeometrie. Diese Zusammenschau aber ist charakteristisch für ihn und trifft auch auf die höhere Algebra zu. 30). So ist es auch in der reellen Analysis, wo er behauptet: Im Grunde benutzen alle Beweise des Fundamentalsatzes der Algebra die geometrische Interpretation der Zahlen. Das ist natürlich extrem und missverständlich ausgedrückt. Die Beweise werden leichter übersehbar, wenn man elementar-geometrische Begriffe verwendet, an die Klein alleine denkt. Erforderlich aber sind sie nicht. Doch ohne punktmengentheoretische Topologie (das Axiom vom Dedekindschen Schnitt oder der lokalen Kompaktheit) kann man wirklich nicht auskommen. Ebenso ist es mit dem Gedanken der Fusion in der Funktionentheorie, die er immer mit geometrischen und algebraischen Fragen aus der Theorie der Modulfunktionen in Verbindung bringt.

Klein war ganz und gar ein Synthetiker. Alle Teile der Mathematik sah er gemeinsam und die gesamte Mathematik wiederum als einen Teil unserer Kultur.

Die Forderung der Fusion hatte bei ihm auch eine Spitze und die war gegen die Axiomatiker gerichtet. Nicht dass er die letzte Sicherung mathematischer Resultate durch einen axiomatischen Aufbau als eine Kontrolle der Aussagen verkannte. Aber die richtige Bedeutung der Axiome hat er nie begriffen, wie Freudenthal feststellt. 31). Nach Klein ist ein Axiom eine evidente Wahrheit, die nicht bewiesen werden kann und nicht bewiesen werden braucht. 32). An einer anderen Stelle sagt er noch einmal: Die Axiome der Geometrie sind nicht willkürlich sondern vernünftige Sätze. 33). Und er ist nicht philosophisch genug interessiert, um diesen Terminus "vernünftige Sätze" weiter zu beleuchten.

Den axiomatischen Stil in einer Darstellung konnte er gar nicht leiden. "Der Forscher selbst arbeitet in der Mathematik wie in jeder Wissenschaft durchaus nicht in dieser streng deduktiven Weise, sondern er benutzt wesentlich seine Phantasie und geht induktiv, auf heuristische Hilfsmittel gestützt vor," 34) schreibt er und bald darauf folgt: "Die induktive Arbeit dessen, der den Satz zum ersten Male aufstellt, wiegt mindestens soviel wie die deduktive dessen, der ihn zuerst beweist." 35) Dann fährt er versöhnlich fort:"Beides ist gleich notwendig." Und an anderer Stelle werden in historischer Übersicht die grossen Mathematiker in die Klassen A und B geteilt, je nachdem sie "inhaltlich" oder "axiomatisch" denken. 35a)

Klein schreibt in seinen Arbeiten liebenswürdig breit. Es geht - wie er es nennt - genetisch vor. Erst wird der Gedankengang angedeutet, und dann beginnt er bei der Ableitung der Resultate noch einmal von vorne. Er wendet sich gegen die starre Gliederung in Voraussetzung, Behauptung, Beweis, Determination. Er hasst das Verstecken der zur Entdeckung führenden Gedanken. Euklid und Gauss taten dies und zwar ganz offenbar aus der Scheu, igendein persönliches Moment in ihre Darstellung fliessen zu lassen.

Es gibt eine Reihe von Schülern Hilberts, bei denen in der Einleitung ihrer Schriften eine Überlieferung von Klein in der Diktion erkennbar zu sein scheint. Dazu würde ich Blumenthal, Otto Toeplitz, Hermann Weyl, den grossen Meister der Monographien und Erich Hecke zählen.

Klein meint, dass die axiomatische Darstellung notwendig zum "Purismus" führt, der Abschirmung des einen Teiles der Mathematik gegen den anderen. Hier aber hat er sich radikal geirrt. Der Bourbakismus unserer Tage ist axiomatisch, aber er verbindet gerade die einzelnen Teile wieder miteinander. Ja, das ist sein Ausgangsmotiv. Der gesamten Mathematik zugrunde liegen wenige Mutterstrukturen, und zwar: 1. Algebraische Strukturen, 2. Ordnungsstrukturen, 3. Topologische Strukturen.

Unsere klassischen Gebiete wie Infinitesimalrechnung, analytische Geometrie, Funktionentheorie entstehen durch Mischung dieser Strukturen. Daran müsste Klein seine wahre Freude haben. 36)

Eine topologische Struktur muss man wohl zwangsweise als geometrisch bezeichnen, denn sie handelt von den Eigenschaften eines Raumes (siehe auch oben die Definition von Geometrie durch Hodge). Dann aber sind Gebiete wie Infinitesimalrechnung, Funktionentheorie auch auf Geometrie basiert. So hat Klein z.B. die Funktionentheorie immer angesehen. Er nannte seine Betrachtungsweise der Funktionentheorie: "Riemannsche Funktionentheorie".

Nur den Gegensatz von Weierstrass'scher und Riemannscher Funktionentheorie verstehen wir heute nicht mehr. Die Lehren dieser beiden Mathematiker sind seit der Entdeckung von Goursat (dass ohne weitere Voraussetzungen alle in einem Gebiete komplex differenzierbaren Funktionen in eine Potenzreihe entwickelt werden können) so miteinander verschmolzen, dass eine Nahtstelle nicht mehr erkennbar ist. Jede nach Riemann holomorphe Funktion ist nach Weierstrass holomorph und trivialerweise auch umgekehrt. Gegen diese Verschmelzung hätte Klein gewiss nichts einzuwenden gehabt (obwohl Riemann sein grosses Vorbild und er gegen Weierstrass aus der kurzen Zeit seines Berliner Aufenthaltes 1869-1870 kritisch gesinnt war.) 37) Schreibt Klein doch in einer seinen Vorbemerkungen zu Band I seiner gesammelten Abhandlungen: "Mein Interesse war von meiner Bonner Zeit her (also der Zeit, in der er etwa 20 Jahre alt war) darauf gerichtet, im Widerstreit der sich befehdenden mathematischen Schulen das gegenseitige Verhältnis der nebeneinander herlaufenden Arbeitsrichtungen zu verstehen und ihre Gegensätze durch eine einheitliche Gesamtauffassung zu umspannen". 38). Wie wohl müsste er von dieser Perspektive aus heute dem Bourbakismus gewonnen sein! Denn gerade eine solche einheitliche Konzeption der Mathematik, um die sich die Franzosen mit soviel Erfolg nunmehr schon etwa 2 Jahrzehnte bemühen, war stets Kleins Hauptziel. Dabei erscheint aber Bourbaki nicht so duldsam wie der alte Meister in Göttingen. Eine gänzlich neue Nomenklatur wird in vielen Teilen der Mathematik systematisch eingeführt. Sie hat wegen ihrer Zweckmässigkeit sich in weitem Masse durchgesetzt. Dabei war sie wegen des Umlernens, zu dem wir gezwungen würden, vor allem unter uns Älteren zunächst durchaus nicht willkommen und reizte wegen der Hartnächigkeit, mit der sie von ihren Anhängern benutzt wurde, zum Widerspruch. Aber unsere junge Generation von Mathematikern ist dem Bourbakismus auffallend schnell verfallen, obwohl nichts als sachliche Erwägungen sie dazu veranlassen konnte und die intellektuelle Jugend gegen jede geistige Diktatur besonders empfindlich ist.

Klein würde vermutlich dieser Entwicklung wegen der intensiven Fusion der Gebiete sich nicht widersetzt haben und schliesslich auch die axiomatische Methode wegen ihrer sichtbaren Erfolge anerkannt haben.

Er würde nur immer wieder darauf drängen, dass der einzelne Schritt im Aufbau so gesetzt wird, dass seine Sinnhaftigkeit unmittelbar einleuchtet oder wenigstens leicht begründet werden kann. Das ist beim axiomatischen Aufbau nicht leicht zu erreichen, aber doch nicht grundsätzlich ausgeschlossen. Hier liegt für uns Hochschullehrer schon die grosse Spanne zwischen Forschung und Lehre, die es mit immer neuen Versuchen zu überbrücken gilt. Man denke da doch nicht nur an Husarenritte, sondern an die vielen Versuche der letzten Jahrzehnte, die geglückt sind und zu einem Standardwissen an den Universitäten geführt haben.

Über die Erörterung allgemeiner Fragen wie Anschauung und Fusion ist noch ein grosses Arbeitsgebiet von Felix Klein vergessen worden. Die Funktionentheorie. Auch hier ist sein Erbe unübersehbar. Hermann Weyls glänzendes Buch: "Die Idee der Riemannschen Fläche" setzt einen Schlusspunkt unter die rasche Entwicklung der Uniformisierungstheorie um die Jahrhundertwende. An dem Aufbau dieser Theorie hat Klein ganz wesentlich mitgearbeitet. Das Buch ist 1912 in Göttingen geschrieben und Klein gewidmet. Wir dürfen annehmen, dass es seine volle Billigung hatte. Und dieses Buch ist bis zum heutigen Tag noch ein Standardwerk in der gelehrten Welt.

Trotzdem hat sich die Funktionentheorie seit Kleins Zeiten wesentlich gewandelt. In den allgemeinen Darstellungen machen die linearen Transformationen (und erst recht ihre geometrischen Interpretationen) einen kleineren Teil als früher aus. Die kompakten Riemannschen Flächen und ihre korrespondierenden algebraischen Funktionen stehen auch nicht mehr so im Vordergrunde. Das wesentliche Interesse erheischen gerade die nicht-kompakten Flächen und ihre Funktionen, die also notwendig wesentliche Singularitäten haben. Das ist ein grosses Gebiet geworden. Nur 2 Namen seien hier genannt, die ein ganzes Programm bedeuten: Picard und Rolf Nevanlinna. Aber auch der Stil der Beweise hat sich sehr geändert. Man vergleiche etwa den Beweis des Riemannschen Abbildungssatzes noch bei Hilbert und in unseren Tagen. Der Begriff der normalen

Familie holomorpher (bzw. meromorpher) Funktionen hat viel vereinfacht. Und ein Zurückgreifen auf reelle Funktionen wird von manchen Autoren möglichst vermieden.

Dann ist da heute die Funktionentheorie mehrerer Veränderlichen, die nun denselben Umfang und dieselbe Bedeutung wie die klassische Funktionentheorie erreicht hat und von der um die Jahrhundertwende noch so gut wie nichts da war. Gerade die letzte Entwicklung der Funktionentheorie mehrerer Veränderlichen hätte Klein grosses Vergnügen bereitet. Da sind nun eng miteinander verwoben komplexe Analysis, Topologie beider Arten und Algebra.

Träte nun Klein plötzlich zwischen uns in seiner hohen Gestalt, mit seinen leuchtenden Augen, seinem Gespür für alle mathematisch produktiven Kräfte, aber auch mit seinem Anspruch, die Qualität mathematischer Arbeit gut abschätzen zu können, er wäre nach einigem Zögern sicher nicht unzufrieden mit der intensiven mathematischen Entwicklung seit den Tagen seines eigenen Wirkens. Nur eines bekümmerte ihn tief: Der Zustand der Schulmathematik und ihre viel zu locker gewordene Verbindung mit dem, was an den Universitäten gelehrt wird.

Auf den Gymnasien ist man immer noch darum bemüht, das Kleinsche Programm durchzuführen, 35 Jahre nach seinem Tode. Das scheitert zunächst schon an äusseren Dingen. Der Umfang des Mathematikunterrichtes ist bei uns in Westdeutschland immer weiter reduziert, obwohl das Leben immer mehr der Mathematik bedarf. Von 6 auf 5, von 5 auf 4, von 4 auf 3 Wochenstunden ist der Mathematikunterricht auf Realgymnasien und Oberrealschulen und ihren Nachfolgeinstituten zusammengeschrumpft. Mit weiteren Reduktionen müssen wir rechnen oder sie sind gar schon eingeführt. (Ähnliches gilt für einige Nachbarländer). Das alleine hätte schon Klein zur Verzweiflung gebracht. Aber für die Tatsache, dass das Kleinsche Programm noch nicht durchgeführt ist - trotz vieler Bemühungen - gibt es noch einen anderen Grund. Vielleicht ist es nie befriedigend durchführbar - weil es logisch zu schwierig für eine Durchschnittsklasse und einen Durchschnittslehrer sein könnte. Die axiomatische Begründung der Bewegungsgeometrie - oder besser der Abbildungsgeometrie - haben wir in wissenschaftlicher Allgemeinheit jetzt durch F. Bachmann kennengelernt. Aber bis zur leicht lesbaren Darstellung des Spezialfalles der euklidischen Geometrie scheint im Augenblick noch ein gutes Stück Weges zurückzulegen zu sein.

Nach dem Anhören vieler didaktischer Vorträge zur Geometrie von Fachleuten möchte ich neuerdings die These aufstellen:

Die euklidische Geometrie ist in jedem Falle zu schwer, gleichgültig, ob sie als starre Geometrie nach Hilbert oder als Abbildungsgeometrie nach Bachmann begründet wird. In sich selbst ruhende euklidische Geometrie kann auf den Oberklassen immer nur mit schlechtem Gewissen behandelt werden.

Die Axiomatik der reellen Zahlen macht dagegen heute keine Schwierigkeit mehr. Und da ein guter Schulunterricht immer - wenn auch vielfach unausgesprochen - eine sichere axiomatische Deckung haben muss, so ist meine letzte Ansicht zum Schulunterricht:

Man solle sehr früh die eigenständige Entwicklung der euklidischen Geometrie abbrechen, dann von der linearen Algebra früh zur analytischen Geometrie gelangen und später eine Vertiefung dieses Weges durch die reelle Analysis, die Infinitesimalrechnung vornehmen.

Klein hat schwer um die Einführung der Infinitesimalrechnung auf der Schule gekämpft. Heute müssen wir sagen: Er war zu zaghaft. Die Infinitesimalrechnung ist viel leichter als die euklidische Geometrie (immer mit dem Gedanken an eine axiomatische Begründung im Hintergrund). Dass man aber durch Anschauung die logische Begründung ersetzen kann, ist eine ganz verderbliche Irrlehre.

Damit komme ich ganz im Gegensatz zu dem, was einer unserer angesehensten Hochschulpädagogen, Wilhelm Flitner, in seinem Buch: "Hochschulreife und Gymnasien" auf Seite 34 über die Anforderungen in der Mathematik sagt: "Beim Studierenden muss Kenntnis der Elementarmathematik vorausgesetzt werden," hebt er an. Zur Elementarmathematik rechnet er neben der Analytischen Geometrie noch die Hilbertsche Grundlegung der Euklidischen Geometrie. Ausdrücklich <u>nicht</u> dazu gehört die Infinitesemalrechnung.

Das erscheint mir

<u>1. Dogmatisch.</u> Es gibt keinen Beweis für die Richtigkeit dieser Abgrenzung der Elementarmathematik.

<u>2. Unwirklich.</u> Für den einfachen Physikunterricht benötigt man eine gewisse Kenntnis der Infinitesimalrechnung, nicht aber die Hilbertsche Axiomatik. Sollen denn gar noch die Mediziner und Pharmazeuten auf der Universität einen Hilfskurs in Infinitesimalrechnung bekommen damit sie der Physikvorlesung zu folgen vermögen?

<u>3. Der ganzen mathematischen Didaktik widersprechend.</u> Es gibt kein Fach, in dem die Didaktik (notwendigerweise) so gepflegt ist wie in der Mathematik. Klein hat diesen Wissenszweig vor 50 Jahren zu Ansehen gebracht.

In der Schrift von Flitner wird nun (sicherlich nicht von ihm inauguriert, wohl aber von seinen mathematischen Beratern) einfach dogmatisch ein Strich durch diese 50-jährige Arbeit und Entwicklung gezogen.

Klein hätte sich dem ganz entschieden widersetzt. Verteidigen auch wir den Umfang des mathematischen Unterrichtes auf der Schule. Das heutige Leben mit seinen immer abstrakter werdenden Denkprozessen erfordert es. Versuchen wir aber den Unterricht entsprechend unserer modifizierten Auffassung von dem, was Mathematik ist, ganz undogmatisch zu modernisieren und behalten wir Tuchfühlung mit den benachbarten Wissenschaften Physik und Astronomie. Dann bleiben wir auch in der Pflege der Schulmathematik noch Kleins Erben.

Anmerkungen.

1) von Staudt, Christian, Geometrie der Lage, Nürnberg 1847, sowie weitere Hefte 1856, 1857, 1860.

2) siehe F. Klein, Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert. 2 Bände 1926.

3) Hans Freudenthal, Die Grundlagen der Geometrie um die Wende des 19. Jahrhunderts. Math-Phys. Semesterberichte VII p.69-91 (1960).

4) W.V.D. Hodge, Changing views of geometry, The Mathematical Gazette, XXXIX (1955) p.178-183.

5) Felix Klein Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen, Erlangen 1872.

6) siehe 4), p.29.

7) Teil II p.28

8) Arthur Cayley, A six memoir on quanties, Ges. Werke Bd. II

9) siehe H. Behnke und R. Remmert, Vorlesungen über Differentialgeometrie, 4. Auflage, 1958, 2. Teil (von R. Remmert).

10) H. Whitney, Differentiable Manifolds, Ann. of Math. 37 (1936) und zahlreiche folgende Arbeiten desselben Autors.

11) Über die Funktionentheorie auf solchen komplexen Mannigfaltigkeiten, siehe den Bericht: H. Behnke, Int. Math. Kongress, Amsterdam (1954).

12) R. Remmert, Compt. r. Acad des Sciences 243 (1956) p.118-121

13) F. Hirzebruch, Some problems on differentiable and complex manifolds, Ann. Math. 60 (1954) p.212-236.

15) siehe Steenrod und I.H.C. Whitehead in Proc.Nat.Acad.Sci.U.S.A. 37 (1951) p. 58-63.

16) Elie Cartan, Abh. Math. Seminar Universität Hamburg 11 (1935) p. 116-162

17) Thom, Comm. math. helv. 28 (1954) p. 17-86

18) siehe a.a.O. 4) p. 178

18)a F. Klein, Math. Ann. 6 (1873) p 135-136

19) Elementarmath. II p. 172

20) Elementarmath. II p. 2

21) Elementarmath. II p. 2

22) Elementarmath. I p. 38

23) Felix Klein, Gesammelte Abhandlungen Bd. II p. 234 ff

24) Entw. der Math. I p. 335-336.

25) siehe etwa Duschek-Mayer, Lehrbuch der Differentialgeometrie I p. 20.

26) siehe etwa H. Behnke und H.G. Steiner, Der Begriff des Vektors in der wissenschaftlichen Literatur, Der Mathematikunterricht, herausgegeben von Eugen Löffler, 1956, Heft 1 p 10 und H. Behnke und F. Sommer, Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen p. 278, § 13 I.

27) Felix Klein, Gesammelte Abhandlungen Bd. II p. 6

28) Felix Klein, Gesammelte Abhandlungen Bd. II p 239

29) Elementarmath. I p. 93

30) siehe Felix Klein, Verlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen 5. Grades 1884.

31) A.a.O 3) p. 73

32) Z.B.Elementarmath. II, p.171ff oder Ges. Abh. Bd II Vorbemerkungen.

33) Elementarmath. II p. 202

34) Elementarmath. I p. 224

35) Elementarmath. I p. 224

35)a Elementarmath. I p. 90-91

36) Nicolas Bourbaki,Elements de mathématique, Paris seit 1941. Zur Zeit sind gut 20 Hefte erschienen. Zur Übersicht siehe: Nicolas Bourbaki, The architecture of mathematics, American math. Monthly 57, (1950) p. 221

37) Im Februar 1870 hält Klein im Seminar von Weierstrass einen Vortrag über das Klein-Cayleysche Modell der nichteuklidischen Geometrie, Weierstrass lehnt diese Interpretation ab.

38) Felix Klein, Gesammelte Abhandlungen Bd. I p. 52.

AXIOMATIK IM GEOMETRIEUNTERRICHT

von Günter Pickert

Bei der Frage, ob und in welchem Umfang Axiomatik für den geometrischen Schulunterricht fruchtbar gemacht werden kann, wird man zu unterscheiden haben zwischen dem Mittelstufenunterricht (13-16-jährige Schüler) und dem Oberstufenunterricht (16-19-jährige Schüler). Im Mittelstufenunterricht scheint mir die Axiomatik der Geometrie nur für den Lehrer als wissenschaftlicher Hintergrund seines Lehrens zweckmässig zu sein; zum Unterrichtsstoff dürfte sie wohl nicht gehören. Ein Problem ist es hier natürlich, dem Lehrer eine Axiomatisierung der Geometrie an die Hand zu geben, die sich mit den neueren abbildungsgeometrischen Unterrichtsmethoden verträgt und diese(für den Lehrer natürlich nur) in ein deduktives System bringt. Auf Anregungen von E. SPERNER aufbauend hat hierzu die Mathematische Gesellschaft in Hamburg brauchbare Vorschläge ausgearbeitet und Unterrichtserfahrung gesammelt [1].

In diesem Vortrag möchte ich mich aber auf den Oberstufenunterricht beschränken. In diesem sollte man unbedingt eine axiomatische Begründung der Geometrie geben, schon um die wissenschaftstheoretische Einordnung der Geometrie richtig vollziehen zu können. Selbstverständlich wird man eine solche Begründung in manchen Teilen nur andeuten können. Umso genauer soll man aber dafür diejenigen Teile erörtern, die man zur ausführlich Behandlung bestimmt, und um so sorgfältiger gilt es, das geeignet Axiomensystem auszuwählen. Alten Traditionen entsprechend wird ma zunächst an das auf EUKLID zurückgehende, von PASCH und HILBERT vervollkömmnete System denken. Es ist aber viel zu umfangreich, und man hat von ihm zur analytischen Geometrie, die ja doch den Geometrieunterricht der Oberstufe beherrscht, einen zu weiten Weg zurückzulegen. Dasselbe, wenn auch nicht in gleich hohem Masse, scheint mir gegen eine spiegelungsgeometrische Axiomatik [2] zu sprechen. Da nun die analytische Geometrie heute zweckmässigerweise auf dem Vektorbegriff aufbaut, dürfte es geraten sein,

---

1) Siehe "Der Mathematikunterricht", Stuttgart 1959, Heft 3.
2) Siehe hierzu F. BACHMANN, Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1959.

auch bei der Aufstellung eines Axiomensystems so zu verfahren und den Vektorbegriff als zweiten Grundbegriff neben den des Punktes zu stellen. Dabei will ich die Vektoren als Abbildungen auffassen, habe also von vornherein die Parallelverschiebungen und versperre damit allerdings von Beginn an den Weg zu nichteuklidischen Geometrien. Aber auch die traditionelle Axiomatik varbaut ja durch die Anordnungsaxiome den Weg zur elliptischen Geometrie, die doch ebenso wichtig ist wie die hyperbolische. Zudem sind elliptische und hyperbolische Geometrie differentialgeometrisch gesehen nur die Sonderfälle konstanter Krümmung unter den nichteuklidischen Möglichkeiten für eine Geometrie. Man sollte sich daher nicht an die historische Problemstellung des Parallelenaxioms gebunden fühlen. Statt dessen scheint es mir ratsamer, zuerst einmal die lineare Vektoralgebra und die quadratische Metrik auf geometrische, anschaulich möglichst einsichtige Axiome zu gründen. Das Verständnis für nichteuklidische Möglichkeiten, und zwar gleich im Rahmen der Riemannschen Geometrien, wird m.E. am besten durch anschauliche Betrachtungen an gekrümmten Flächen geweckt, auf denen die vorher axiomatisch begründete euklidische Geometrie nur noch "im Kleinen" gilt.

Im folgenden beschränke ich mich auf die ebene Geometrie, da diese einfachere Formulierungen erlaubt. Nachdem man einmal die ebene Metrik begründet hat, erscheint es dann als ziemlich naheliegend, auch für den Raum eine quadratische Metrik zu fordern und aus dieser die räumlichen Orthogonalitätsverhältnisse herzuleiten. Wie schon bemerkt, gehe ich von den Grundbegriffen "Punkt" und "Vektor" aus, wobei ein Vektor eine Abbildung der Menge der Punkte in sich sein soll. Das Bild des Punktes P beim Vektor $\underline{v}$ werde im folgenden mit $P^{\underline{v}}$ bezeichnet. Unterstrichene Buchstaben bedeuten immer Vektoren.

<u>Axiom I</u>. Zu Punkten P, Q gibt es stets genau einen Vektor $\underline{a}$ mit $P^{\underline{a}} = Q$.

<u>Axiom II</u>. Zu Vektoren $\underline{a}$, $\underline{b}$ gibt es einen Vektor $\underline{c}$ mit $(P^{\underline{a}})^{\underline{b}} = P^{\underline{c}}$ für alle Punkte P.

Der durch Axiom I als eindeutig bestimmt geforderte Vektor $\underline{a}$ wird (wie üblich) mit $\overrightarrow{AB}$ bezeichnet und der nach Axiom II vorhandene, nach der üblichen Gleichheitsdefinition für Abbildungen (oder aber auch nach Axiom I) eindeutig bestimmte Vektor $\underline{c}$ mit $\underline{a} + \underline{b}$.

Axiom III. $\underline{a} + \underline{b} = \underline{b} + \underline{a}$ für alle Vektoren $\underline{a}$, $\underline{b}$.

Man beweist jetzt sehr leicht $\overrightarrow{PP} = \overrightarrow{QQ}$ für alle Punkte P, Q und hat damit den Nullvektor 0 mit $\underline{a} + 0 = \underline{a}$. Ferner bildet man bei beliebig gewähltem P zum Vektor $\underline{a}$ den Vektor $\overrightarrow{P^{\underline{a}}P} = -\underline{a}$ und hat $\underline{a} + (-\underline{a}) = 0$. Damit erweist sich $\underline{a}$ als umkehrbare Abbildung der Menge der Punkte auf sich. Da das Assoziativgesetz allgemein für die Hintereinanderausführung von Abbildungen gilt, bilden somit die Vektoren eine abelsche Gruppe. In dieser werden in bekannter Weise die ganzen Zahlen als Operatoren eingeführt:

$$\underline{a}n = \sum_{i=1}^{n} \underline{a}, \quad \underline{a}(-n) = -\underline{a}n, \quad \underline{a}0 = 0 \qquad \text{(n eine natürliche Zahl).}$$

Es gelten dann für alle Vektoren $\underline{a}$, $\underline{b}$ und alle ganzen Zahlen r, s die Regeln

(1) $\underline{a}1 = \underline{a}$, $(\underline{a}+\underline{b})r = \underline{a}r + \underline{b}r$, $\underline{a}(r+s) = \underline{a}r + \underline{a}s$, $\underline{a}(rs) = (\underline{a}r$

Bei diesen scheint es mir ratsam, sich auf Beispiele mit konkrete Werten für r und s zu beschränken, falls die Beweise für (1) nicht als gute Gelegenheit zum Einüben der vollständigen Induktion benutzt werden sollen.

Um das Verständnis dafür zu wecken, dass nicht etwa einzelne der Axiome überflüssig sind, kann man Gegenbeispiele bringen. Nimmt man die sämtlichen Bewegungen in der Ebene als Vektoren, so ist schon Axiom I verletzt. Nimmt man die Spiegelungen an Punkten (oder auch die an Geraden) als Vektoren, so gilt zwar Axiom I aber nicht mehr II. Verwendet man schliesslich als Vektoren wieder sämtliche Bewegungen (im eigentlichen Sinn, also orientierungserhaltende) der Ebene, aber als Punkte die Halbgeraden, so gelten I und II, während III verletzt ist.

Axiom IV a). Zu jeder natürlichen Zahl $n \neq 1$ und jedem Vektor $\underline{a}$ gibt es einen Vektor $\underline{b}$ mit $\underline{b}n = \underline{a}$.

b). Wenn $\underline{a}n = 0$ für eine natürliche Zahl $n \neq 1$, so $\underline{a} = 0$.

Aus diesem Axiom ergibt sich die Möglichkeit, für jede rationale Zahl m/n (m ganze Zahl, n natürliche Zahl) den Vektor $\underline{a}(m/n)$ durch

$$(\underline{a}(m/n))n = \underline{a}m$$

zu definieren. Man kann dann die Gleichungen (1) auch für beliebige rationale Zahlren r, s beweisen.

Dass weder IVa noch IVb entbehrt werden kann, sieht man an den folgenden Modellen. Nimmt man als Punkte die Punkte eines Punktgitters [3] und als Vektoren die Translationen dieses Gitters, so sind I-III und IVb erfüllt, während IVa verletzt ist. Nimmt man als Punkte nur die Punkte einer Kreislinie und als Vektoren die Drehungen dieser Kreislinie in sich, so sind I-III und IVa erfüllt, während IVb verletzt ist.

Ausgehend davon, dass man bei allen wirklich durchgeführten Messungen nur rationale Masszahlen erhält, und dass man für Ortsbestimmungen in der Ebene mit zwei Messrichtungen, nicht jedoch aber mit einer auskommt, formuliert man

Axiom V. Es gibt Vektoren $\underline{a}$, $\underline{b}$ so, dass jeder Vektor in der Form $\underline{a}r + \underline{b}s$ (r, s rationale Zahlen), aber weder $\underline{a}$ in der Form $\underline{b}s$ noch $\underline{b}$ in der Form $\underline{a}r$ dargestellt werden kann.

Durch einfache Rechnung ist zu zeigen, dass dann

$$\underline{a}r + \underline{b}s = \underline{a}r' + \underline{b}s'$$

stets

$$r = r', \; s = s'$$

nach sich zieht. Damit ist die Koordinatendarstellung der Vektoren gesichert.

Natürlich gerät man mit der in Axiom V vorgenommenen Beschränkung auf rationale Skalare in Schwierigkeiten, sobald man die im folgenden zu formulierenden metrischen Axiome hinzufügt. Man wird also später Axiom V abändern und IV durch ein stärkeres Axiom ersetzen müssen. Ich halte es aber für didaktisch zweckmässig, an dieser Stelle noch nichts über diese Dinge zu sagen. Man bildet nämlich mit dieser Beschränkung auf das Rationale genau jene historische Situation nach, wie sie in der Antike vor der Entdeckung der Irrationalzahlen herrschte, und führt so die Schüler zu der Einsicht, dass die Existenz von Irrationalzahlen durch unsere Anforderungen an die Metrik erzwungen wird, während das tatsächliche Messen nie zu Irrationalzahlen führt.

Für den metrischen Teil des Axiomensystems benötigt man zwei neue Grundbegriffe, nämlich "kongruent" (oder "gleichlang") und "orthogonal". Beide sind Relationen in der Menge der Vektoren. Ich bezeichne sie im folgen mit $\simeq$ bzw. mit $\perp$. Mit Rücksicht auf die später notwendige Erweiterung des Skalarbereichs ist im folgenden bereits überall "rationale Zahl" durch "Skalar" ersetzt.

---

3) Ein eindimensionales, also die Veranschaulichung der ganzen Zahlen auf der Zahlengeraden, genügt bereits.

<u>Axiom VI</u>. 1.) $\underline{a} \simeq \underline{a}$.

2.) Wenn $\underline{a} \simeq \underline{c}$ und $\underline{b} \simeq \underline{c}$, so $\underline{a} \simeq \underline{b}$.

3.) Zu $\underline{a}, \underline{b} \neq 0$ gibt es einen Skalar c mit $\underline{b} \simeq \underline{a}c$

<u>Axiom VII</u>. 1.) Wenn $\underline{a} \perp \underline{b}$, so $\underline{b} \perp \underline{a}$.

2.) Wenn $\underline{a} \perp \underline{b}$, so $\underline{a} \perp \underline{b}c$ für alle Skalare c.

3.) Wenn $\underline{a} \perp \underline{a}$, so $\underline{a} = 0$.

4.) Zu $\underline{a} \neq 0$ gibt es $\underline{b} \neq 0$ mit $\underline{a} \perp \underline{b}$.

5.) Zu $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \neq 0$ gibt es im Falle $\underline{b}, \underline{c} \perp \underline{a}$ einen Skalar c mit $\underline{c} = \underline{b}c$.

Für einen Vektor $\underline{c} \neq 0$ werden jetzt mittels V, VII durch

(2) $\underline{x} - P_{\underline{c}}\underline{x} \perp \underline{c}$, $P_{\underline{c}}\underline{x} = \underline{c}x$ für einen Skalar x, $S_{\underline{c}}\underline{x} = P_{\underline{c}}\underline{x}2 - \underline{x}$

die linearen Abbildungen $P_{\underline{c}}$ (Projektion auf $\underline{c}$) und $S_{\underline{c}}$ (Spiegelung an $\underline{c}$) definiert. Aus der anschaulichen Bedeutung der Spiegelung entnehmen wir das

<u>Axiom VIII</u>. $\underline{a} \simeq \underline{b}$ genau dann, wenn es eine Spiegelung $S_{\underline{c}}$ mit $S_{\underline{c}}\underline{a} = \underline{b}$ gibt.

Dieses Axiom lässt eine für seine Anwendung bequemere Umformung zu:

(3) $\underline{a} \simeq \underline{b}$ genau dann, wenn $\underline{a} + \underline{b} \perp \underline{a} - \underline{b}$.

Denn aus $\underline{a} + \underline{b} \perp \underline{a} - \underline{b}$ ergibt sich im Falle $\underline{c} = \underline{a} + \underline{b} \neq 0$

$$P_{\underline{c}}\underline{a} = (\underline{a} + \underline{b})2^{-1}, \quad S_{\underline{c}}\underline{a} = \underline{b}$$

wegen

$$\underline{a} = (\underline{a} + \underline{b})2^{-1} + (\underline{a} - \underline{b})2^{-1},$$

während im Falle $\underline{a} + \underline{b} = 0$ für einen (nach VII existierenden) Vektor $\underline{c} \neq 0$ mit $\underline{c} \perp \underline{a}, \underline{b}$ nach (2) $P_{\underline{c}}\underline{a} = 0$ und daher $S_{\underline{c}}\underline{a} = -\underline{a} = \underline{b}$ gilt. Umgekehrt folgt aus $S_{\underline{c}}\underline{a} = \underline{b}$ nach (2) [illegible]

$$\underline{a} + \underline{b} = P_{\underline{c}}\underline{a}2, \quad \underline{b} - \underline{a} = (P_{\underline{c}}\underline{a} - \underline{a})2$$

und daher

$$\underline{a} + \underline{b} \perp \underline{a} - \underline{b}.$$

Setzt man in (3) $\underline{a} = \underline{c} + \underline{d}$, $\underline{b} = \underline{c} - \underline{d}$ und benutzt VII_2, so ergibt sich die Gleichwertigkeit von VIII auch mit

(4) $\underline{c} \perp \underline{d}$ genau dann, wenn $\underline{c} + \underline{d} \simeq \underline{c} - \underline{d}$.

Die Formulierungen (3), (4) von VIII zeigen, dass man einen der beiden Grundbegriffe $\simeq$, $\perp$ durch den anderen ausdrücken kann, wodurch VIII überflüssig wird.

Um nun die innere Multiplikation von Vektoren einführen zu können, wird ein fest gewählter Vektor $\underline{e} \neq 0$ (nach V gibt es einen solchen!) als Einheitsvektor bezeichnet und ebenso jeder Vektor $\simeq \underline{e}$. Zu jedem Vektor $\underline{x}$ gibt es nun einen Skalar x mit $\underline{x} \simeq \underline{e}x$ (für $\underline{x} \neq 0$ nach VI_3 und für $\underline{x} = 0$ mit $x = 0$ nach VI_1). Aus $\underline{e}x \simeq \underline{e}x'$ folgt nach (3)

$$\underline{e}(x-x') \perp e(x+x')$$

und nach VII somit

$$x' = x \quad \text{oder} \quad x' = -x.$$

Der Skalar x^2 ist daher durch $\underline{x}$ nach Vorgabe von $\underline{e}$ eindeutig bestimmt und ändert sich übrigens auch nicht, wenn $\underline{e}$ durch einen anderen Einheitsvektor ersetzt wird. x^2 sei im folgenden als die Norm $N(x)$ von $\underline{x}$ bezeichnet. Durch die Norm vermeide ich das vorzeitige Benutzen der Anordnung des Skalarbereichs, die sich erst zum Schluss aus den geometrischen Axiomen ergeben soll. Das innere Produkt $\underline{a} \cdot \underline{b}$ der Vektoren $\underline{a}$, $\underline{b}$ lässt sich nun durch

$$\underline{a}(\underline{a} \cdot \underline{b}) = P_{\underline{a}}\underline{b}\, N(\underline{a}) \quad \text{für } \underline{a} \neq 0,$$
$$\underline{a} \cdot \underline{b} = 0 \qquad\qquad \text{für } \underline{a} = 0$$

definieren. $\underline{a} \cdot \underline{b} = 0$ bedeutet dann $P_{\underline{a}}\underline{b} = 0$ bzw. $\underline{a} = 0$ und damit $\underline{a} \perp \underline{b}$. Um zu zeigen, dass die innere Multiplikation eine symmetrische Bilinearform ist, benötigt man nur noch die Regeln

$$N(\underline{a}c) = N(\underline{a})\, c^2;$$
$$\underline{a} \cdot \underline{b} = \underline{b} \cdot \underline{a}, \text{ falls } \underline{a} \simeq \underline{b}.$$

Die erste folgt sofort aus $\underline{a} \simeq \underline{e}a$, $N(\underline{a}) = a^2$, da $\underline{a} \simeq \underline{e}a$ nach (3) und VII_{1-2} $\underline{a} \simeq \underline{e}(a)$ nach sich zieht. Die zweite ergibt sich dadurch, dass nach VIII eine Spiegelung S mit $S\underline{a} = \underline{b}$ (und daher nach (2) auch $S\underline{b} = \underline{a}$) vorhanden ist; nach VIII ist eine Spiegelung eine kongruente, also nach (4) auch eine orthogonale Abbildung und daher gilt nach (2)

$$SP_{\underline{a}}\,\underline{b} = P_{S\underline{a}}S\underline{b} = P_{\underline{b}}\underline{a}.$$

Damit ist der Anschluss an die analytische Geometrie erreicht: zu einem Einheitsvektor $\underline{e}$ lässt sich nach VII_4 und VI_3 ein Einheitsvektor $\underline{e}' \perp \underline{e}$ finden; nach VII_{2-3} und V kann jeder Vektor $\underline{x}$ eindeutig in der Form

$$\underline{x} = \underline{e}x + \underline{e}'y$$

dargestellt werden, und es gilt

$$\underline{x}^2 (= \underline{x} \cdot \underline{x}) = x^2 + y^2,$$

während

$$\underline{e}x_1 + \underline{e}'y_1 \perp \underline{e}x_2 + \underline{e}'y_2$$

gleichbedeutend ist mit

$$x_1x_2 + y_1y_2 = 0.$$

Da eine Norm nach Definition stets ein Quadrat sein muss, ergibt sich für den Skalarbereich daraus insbesondere die Forderung

(5) Zu x, y gibt es z mit $x^2 + y^2 = z^2$.

Axiom VII_3 liefert ferner

(6) Wenn $x^2 + y^2 = 0$, so $x = y = 0$.

Da (5) bekanntlich im Bereich der rationalen Zahlen nicht gilt (Irrationalität von $\sqrt{2}$ z.B.!), führen also die Axiome VI-VIII zu einem Widerspruch gegen die Axiome I-V. Dieser löst sich nun auf, wenn man einen umfassenderen Zahlkörper als den der rationalen Zahlen zum Skalarbereich nimmt, in V "rationale Zahl" durch "Skalar" ersetzt und weiter Axiom IV durch

<u>Axiom IV'</u>. Jedem Vektor $\underline{x}$ und jedem Skalar y ist ein Vektor $\underline{x}y$ so zugeordnet, dass (1) für alle Vektoren $\underline{a}$, $\underline{b}$ und alle Skalare r, s gilt.

Die auf V folgenden Entwicklungen bleiben von diesen Änderungen unberührt, da bei ihnen vom Skalarbereich nur die Körpereigenschaft [5)] und von der Multiplikation der Vektoren mit den Skalaren nur (1) benutzt worden ist. Wollte man jedoch die Beschränkung auf rationale Skalare beibehalten, so müsste man die Axiome VI-VIII irgendwie abändern, was natürlich viele Unbequemlichkeiten zur Folge hätte.

Mit dem bis jetzt aufgestellten Axiomensystem haben wir aber noch nicht eine Geometrie gewonnen, in der man die sämtlichen elementargeometrischen Konstruktionen durchführen kann. Dieses Ziel wird erst erreicht durch

<u>Axiom IX</u>. Eine Gerade, die einen Innenpunkt eines Kreises enthält, geht auch durch einen Punkt dieses Kreises.

---

5) Allerdings auch noch $1 + 1 \neq 0$; aber das folgt aus V, VI_3 und VIII, da nach (2) bei $1 + 1 = 0$ jede Spiegelung die identische Abbildung wäre.

Dabei ist natürlich eine Gerade definiert als die Menge aller Punkte X mit $\overrightarrow{AX} = \underline{c}s$ (dabei $\underline{c}$ ein fester Vektor $\neq 0$ und A ein fester Punkt), der Kreis vom Mittelpunkt M und Radius r ($\neq 0$) als die Menge der Punkte X mit $\overrightarrow{MX}^2 = r^2$, und A heisst Innenpunkt eines Kreises, wenn durch ihn keine Gerade geht, die nur einen einzigen Punkt des Kreises enthält. Setzt man $\overrightarrow{MA}^2 = a^2$, so zeigt eine kurze Rechnung, dass A genau dann Innenpunkt des Kreises vom Radius r und Mittelpunkt M ist, wenn a^2-r^2 kein Quadrat ist. Mit $0 \neq \underline{c} \perp \overrightarrow{MA}$ enthält aber die aus den Punkten X mit $\overrightarrow{AX} = \underline{c}s$ bestehende Gerade genau dann einen Punkt dieses Kreises, wenn r^2-a^2 ein Quadrat ist. Nun kann aber jeder Skalar x in der Form a^2-r^2 dargestellt werden; denn das Gleichungssystem $a-r = 1$, $a+r = x$ ist auflösbar [6]. Also hat IX für den Skalarbereich zur Folge:

(7) Wenn x kein Quadrat, so ist $-x$ ein Quadrat.

Nach bekannten Entwicklungen ergibt sich aus (5), (6), (7), dass der Skalarbereich auf genau eine Weise zu einem angeordneten Körper gemacht werden kann; man schreibt $a < b$ genau dann, wenn es c mit $a + c^2 = b$ und $c \neq 0$ gibt. In diesem angeordneten Körper ist dann jedes positive Element ein Quadrat. Umgekehrt erfüllt die ebene analytische Geometrie über einem solchen Körper unser Axiomensystem und zeigt somit dessen Widerspruchsfreiheit. Als Skalarbereich braucht man nicht etwa das System aller reellen Zahlen zu nehmen (dessen Widerspruchsfreiheit bekanntlich problematisch ist); man kann vielmehr einen Körper der gewünschten Art konstruktiv aus dem Körper der rationalen Zahlen durch fortgesetzte algebraische Adjunktion von Quadratwurzeln positiver Zahlen gewinnen. Da dies nicht der einzige Körper mit den gewünschten Eigenschaften ist, erweist sich unser Axiomensystem als nichtkategorisch. Es ist z.B. auf Grund unserer Axiome nicht entscheidbar, ob zwei Ellipsen, von denen jede einen Innenpunkt der anderen enthält, immer einen Schnittpunkt haben (denn das führt auf eine kubische Gleichung), und ebensowenig kann entschieden werden, ob sich der Umfang eines Kreises messen lässt (denn das ist nur richtig, wenn die transzendente Zahl π zum Skalarbereich gehört).

Es fragt sich jetzt natürlich, in welchem Umfang sich eine derartige Axiomatisierung im Unterricht verwenden lässt. Diese Frage kann m.E. nur experimentell beantwortet werden, und mein

6) $x = 1$ führt allerdings auf $r = 0$; aber wegen $1 = 1^2$ ist der Fall $x = 1$ für (7) trivial.

Vortrag möchte zu derartigen Experimenten anregen. Ich selbst versuche seit kurzem, einer kleinen Freiwilligengruppe von Schülern aus der obersten Klasse eines Tübinger Gymnasiums die hier skizzierte Axiomatisierung der Vektorrechnung nahezubringen. Die teilnehmenden Schüler interessieren sich zwar sämtlich besonders für exakte Naturwissenschaften, doch keiner von ihnen hat ausgesprochene Neigung zur Mathematik. Dem Schulleiter, Herrn Oberstudiendirektor Professor SCHWEIZER, habe ich ebenso sehr für diese Möglichkeit zu danken wie für die mir in seiner Eigenschaft als Mathematiklehrer gewährte pädagogische Hilfe. In den bisher abgehaltenen drei Vollstunden bin ich bis zum Axiom V (einschliesslich) gekommen. Mein mir auch von Herrn SCHWEIZER bestätigter Eindruck ist der, dass sich mein Axiomatisierungsversuch jedenfalls in einer Gruppe der Besseren und Interessierteren unter den Schülern der Oberstufe bewähren wird, also in Form eines freiwilligen Zusatzunterrichts. Vermutlich wird man bei Versuchen mit einer vollen Klasse viel von meinem Programm streichen müssen. Eine kleine Vereinfachung entsteht bereits dadurch, dass man die Vektoren von vornherein als umkehrbare Abbildungen der Menge der Punkte auf sich einführt und die Umkehrabbildung eines Vektors wieder als Vektor voraussetzt. Sehr stark lässt sich kürzen, indem man darüber hinaus gleich zu Anfang statt IV schon IV' und zwar mit sämtlichen reellen Zahlen als Skalaren benutzt, unter entsprechender Änderung von V. Statt der Norm wird man dann natürlich die Quadratwurzel aus ihr als Länge des Vektors benutzen, und Axiom IX wird jetzt überflüssig. Man verzichtet damit jedoch darauf, die Notwendigkeit zum Vergrössern des Skalarbereichs über den Körper der rationalen Zahlen hinaus aus anschaulichen geometrischen Forderungen herzuleiten. Erhalten bleiben dabei aber wenigstens die Herleitung der quadratischen Metrik ohne Rückgriff auf den Satz von Pythagoras und die Erkenntnis des Zusammenhangs zwischen den Begriffen "kongruent" und "orthogonal". Das scheinen mir die Mindestforderungen zu sein, die man an eine geometrische Axiomatik stellen sollte.

DISCUSSION FOLLOWING PROFESSOR PICKERT'S LECTURE.

Freudenthal. Axiom II is difficult because there are too many quantifiers in series. Students in highschool don't understand more difficult combinations than .

Many difficulties could be avoided by defining

$$(P+a) + b = P + (a+b)$$

instead of

$$(P^{\underline{a}})^{\underline{b}} = P^{\underline{a+b}}$$

Dieudonné. It is too difficult with two kinds of + .

Freudenthal. We always use two kinds of + .

Pickert. One could make the axiom system shorter. It is also possible to work with models where only some of the axioms are valid. I have not had an opportunity to make pedagogical experiments. I have only given three hours lecture for students in highschool.

Dieudonné. The various methods of introducing geometry can be tried in many different ways in many countries, but we shouldn't talk too much about these experiments here but emphasize the most important thing: When the students have finished their education in highschool they have a clear idea of modern mathematical thinking. They should know a simple axiom system about sum of two vectors, product by a scalar ~~and~~ also scalar product and some of the consequences of the axioms. This is useful when they start at the university, while the present (obsolete) teaching makes it difficult to go from school to university.

Pickert made a too strong distinction between algebra and geometry. It would be better to use algebra and the properties of the real numbers from the very beginning of the teaching of geometry.

Non-euclidean geometry and projective geometry should not be taught in the gymnasium. There isn't time for these subjects. N-dimensional geometry would be better than non-euclidean geometry in the gymnasium.

Behnke and Freudenthal mentioned that non-euclidean geometry gives a very clear impression of the nature of geometry. Freudenthal remarked that this would be very interesting for pupils who are not going to study mathematics later.

Dieudonné. There are two points of view for teaching in highschool: 1) The students who are going to study mathematics at the university should in highschool meet mathematics founded on axioms; if they don't they get great difficulties at the university. 2) The best thing for students who are not going to study mathematics later would be a kind of a mixture between mathematics and physics with pseudo-logics.

Freudenthal. The most important part of the pupils are those who are not going to study mathematics later on. They should learn how to express a physical problem in equations; problems of this kind are difficult enough, and it isn't necessary to try to teach them axiomatics.

Choquet. We can't distinguish between two different kinds of mathematics. What is taught from the age of 15 should be mathematics (i.e. correct deductions etc.) and it isn't important whether it is called axiomatics or not.

Freudenthal. What is interesting for the mathematician is the chain of proofs; the ordinary pupil only cares for the results.

Bundgaard. Perhaps we should to a greater extent consider and take care of the pupils who are especially interested in and sufficiently gifted for studying mathematics. But the lump of students should also in simple cases be acquainted with axiomatic treatment. An important thing about axiomatic treatment is the following: It may be considered a pure form of a situation, where the starting point is made explicitely clear and its consequences are examined according to accepted rules. This is a matter of considerable general importance in many fields (economics, political and social sciences, etc.) The axiomatic method is as old as scientific thinking. Any gymnasium pupil ought to be acquainted with it in the simple form in which it penetrates mathematical thinking of today.

Servais. To reduce mathematics to axiomatics is to amputate an important part of it. We should show how mathematics can be used to bring order in our experiences.

Dieudonné. I agree with Pickert in his aim: Early in school one sees geometry as a physical system. Later on one has to build an axiomatic system whose realization is the well-known geometry. No compromise is possible here.

Bundgaard. In my opinion any gymnasium pupil ought to be taught, in some simple cases, mathematics based upon an axiomatic system. However, I am not convinced that geometry is the best subject for this purpose. Euclidean geometry is a very complicated mathematical structure. I think that e.g. probability theory would be better.

At present the teaching at school lacks coherence and simplicity. Often one grasps arguments, more or less at random, from everywhere, and various underlying structures are mixed together.

Choquet. I think that Freudenthal and Dieudonné use the word axiomatics in different ways: Freudenthal understands by axiomatics a discussion of different axiom systems, while Dieudonné means mathematics founded on an axiomatic system.

Here followed a short discussion about the possibility and usefulness of teaching the pupils to construct axiomatic systems. Apparently the heat of the discussion came from mutual misunderstandings as nobody wanted to teach the pupils to construct silly axiomatic systems and prove silly theorems. And everybody agreed that before we can introduce an axiomatic system we must prepare the students so that they feel the need for this system.

THE INTRODUCTION OF ANGLES IN GEOMETRY

by J. Dieudonné.

In a recent talk at a meeting on the elementary teaching of mathematics, sponsored by OEEC, I pointed out how much easier the teaching of geometry would be if, instead of the cumbersome and obsolete method of Euclid-Hilbert with its outdated emphasis on polygons and triangles in particular, one started right away with the modern ideas of vector spaces, quadratic forms and the group of rotations. In my opinion, this method of exposition is not any more "abstract" than the classical one, and yields a rigorous treatment with much less effort. I would like to substantiate these assertions by rapidly sketching how angles, trigonometry and complex numbers can all be treated at the same time along these lines, in the most natural way.

I. Background. As I visualize it, this method could very well be developed in the last two years of secondary school; I cannot here discuss (from lack of competence in elementary teaching) how the fundamental geometrical notions could be approached in earlier years. I assume that the fundamental properties of real numbers are known, and that the words "set", group","equivalence relation" have been already explained on appropriate examples (no general theory, of course!). I will now recall what is the system of axioms of plane geometry, and give a rapid description of the consequences of these axioms which have first to be developed before the theory of angles can begin.

The undefined notions are that of vector and the three fundamental operations on vectors, the sum $x+y$, the product by a scalar λx, and the scalar product $x \cdot y$. They are linked by two groups of axioms:

A) (axioms of "affine geometry"):

$$x+y = y+x, \quad x+(y+z) = (x+y)+z,$$
$$1 \cdot x = x, \quad (\lambda+\mu)x = \lambda x + \mu x,$$
$$\lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y, \quad \lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x,$$

and finally the axiom stating that the maximum number of linearly independent vectors is exactly 2 (prior to this last axiom, some elementary notions and consequences of the other axioms have of course to be developed).

B) (additional axioms of "euclidean geometry"):

$$x\cdot(y+z) = x\cdot y + x\cdot z,$$
$$x\cdot y = y\cdot x,$$
$$\lambda(x\cdot y) = (\lambda x)\cdot y,$$

and finally

$$x\cdot x > 0 \text{ for every } x \neq 0.$$

Among the first consequences of these axioms one has to give:

1°. In affine geometry the notions of translation, of basis; a homogeneous line is the set of vectors of the form λa (for a vector $a \neq 0$, λ running through all real numbers), a (homogeneous) halfline is defined similarly, but with $\lambda \geqq 0$ for the scalars. A line (resp. half-line) is defined as obtained by translation from a homogeneous line (resp. half-line), which is called its direction.

It is immediatedly verified that two lines with different directions have one and only one common point (the words "point" and "vector" being of course synonymous), and Euclid's "postulate" becomes here a (trivial) theorem.

The fundamental notion of (homogeneous) linear mapping of the plane into itself has of course to be introduced by the conditions

$$u(x+y) = u(x)+u(y) \text{ and } u(\lambda x) = \lambda u(x).$$

When a basis (a,b) is given, the linear mappings are entirely determined by the vectors

$$u(a) = \alpha a + \beta b,\ u(b) = \gamma a + \delta b,$$

or, as one says, by the matrix

$$\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}$$

The determinant of that matrix is defined as usual, and it is directly verified that when one changes the bases, the determinant of the matrix corresponding to u remains invariant, hence can be called the determinant of u (written $\det(u)$). With this comes of course the addition composition of linear mappings (or matrices), the property

$$\det(u \circ v) = \det u \cdot \det v,$$

and the characterization of bijective linear mappings by the non-vanishing of their determinant (which is equivalent also to the condition that the mapping is merely *injective*).

2°. In euclidean geometry one calls *length* of a vector x the number

$$\|x\| = \sqrt{x \cdot x}$$

(positive square root); *orthogonal* vectors x,y are defined as such that

$$x \cdot y = 0,$$

orthogonal lines or half-lines in the obvious way. The fundamental formula (immediately derived from the axioms)

$$\|\lambda x + \mu y\|^2 = \lambda^2 \|x\|^2 + 2\lambda\mu(x \cdot y) + \mu^2 \|y\|^2$$

at once yields Pythagoras's theorem, the Cauchy-Schwarz inequality

$$|x \cdot y| \leqq \|x\| \cdot \|y\|$$

and the triangle inequality

$$\|x \cdot y\| \leqq \|x\| + \|y\|.$$

An *orthonormal* basis (a,b) is such that $\|a\| = \|b\| = 1$, $a \cdot b = 0$; any vector of length 1 can be made (in exactly *two* ways) a member of an orthonormal basis.

II. The group of rotations. An *isometry* of the plane is a mapping u of the plane into itself which preserves the length of the segment joining any two points, i.e. such that

(1) $$\|u(x) - u(y)\| = \|x - y\|$$

or equivalently

(2) $$(u(x) - u(y)) \cdot (u(x) - u(y)) = (x - y) \cdot (x - y)$$

whatever x and y. It is clear that the composition of two isometries yields an isometry, and that translations are isometries. Hence, by composition with a suitable translation, one is immediately reduced to special isometries such that $u(0) = 0$, which are called *orthogonal transformations*: One then proves in succession:

1) *An orthogonal transformation is linear and bijective.*

From (2) and the assumption $u(0) = 0$, one has

$$u(x) \cdot u(x) = x \cdot x;$$

hence, replacing x by $x+y$

$$u(x) \cdot u(y) = x \cdot y. \tag{3}$$

Replace in (3) x by $x+x'$; one gets

$$\begin{aligned} u(x+x') \cdot u(y) &= (x+x') \cdot y = x \cdot y + x' \cdot y = u(x) \cdot u(y) + u(x') \cdot u(y) = \\ &= (u(x)+u(x')) \cdot u(y). \end{aligned} \tag{4}$$

Now, if (a,b) is an orthonormal basis, so is $(u(a),u(b))$ by (3); replacing y by a and b in (4), one gets

$$u(x+x') = u(x)+u(x').$$

The relation $u(\lambda x) = \lambda u(x)$ is proved similarly. As $u(x) = 0$ implies $\|x\| = 0$, hence $x = 0$, u is injective, hence bijective.

2) *The orthogonal transformations form a group.*

It follows indeed from the definition that the inverse of an orthogonal transformation is again such a transformation.

3) *Expression of the matrix of an orthogonal transformation with respect to an orthonormal basis (a,b).*

If

$$u(a) = \alpha a + \beta b, \quad u(b) = \gamma a + \delta b,$$

one must have

$$u(a) \cdot u(a) = u(b) \cdot u(b) = 1, \quad u(a) \cdot u(b) = 0,$$

which gives,

$$\alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2 + \delta^2 = 1, \quad \alpha\gamma + \beta\delta = 0.$$

If $\delta = 0$, this gives $\alpha = 0$, $\beta = \pm 1$, $= \pm 1$; if $\delta \neq 0$, one can write $\alpha = \mu\delta$ hence $\beta = -\mu\gamma$, and this yields $\mu^2 = 1$. Finally the matrix of u has one of two forms

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & -\alpha \end{pmatrix} \tag{5}$$

with $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, and $\det u = 1$ for the first type, $\det u = -1$ for the second. Orthogonal transformations of determinant 1 are called *rotations*.

4) <u>The rotations form a commutative subgroup O^+ of index 2 in the group O of all orthogonal transformations.</u>

The commutativity is directly verified on (5), and the group property as well as the fact that the index $(O:O^+) = 2$ follow from the multiplication formula for determinants. One will now write <u>additively</u> the composition of rotations, and denote by U_θ the matrix of a rotation θ with respect to (a,b); if

$$U_\theta = \begin{pmatrix} c(\theta) & -s(\theta) \\ s(\theta) & c(\theta) \end{pmatrix}$$

one has by definition

$$c^2(\theta) + s^2(\theta) = 1 \tag{6}$$

and from the multiplication formula for matrices it follows that

$$c(\theta+\theta') = c(\theta)c(\theta')-s(\theta)s(\theta') \tag{7}$$

$$s(\theta+\theta') = s(\theta)c(\theta')+c(\theta)s(\theta'). \tag{8}$$

5) <u>The group of rotations is simply transitive on the circle $\|x\| = 1$.</u>

One has only to prove that there is a unique rotation θ such that $\theta(a) = x$; if $x = \alpha a + \beta b$, this follows at once from the first formula (5).

<u>III. Angles, orientation, trigonometry.</u>

6) <u>The group of rotations is simply transitive on the set of homogeneous half-lines.</u>

As each half-line has one and only one point on the circle $\|x\| = 1$, this is a mere restatement of 5).

To each ordered pair (D,D') of homogeneous half-lines there corresponds therefore a single rotation θ such that $\theta(D) = D'$; this mapping of the set P of ordered pairs of half-lines onto O^+ defines an equivalence relation in P; the equivalence classes are called <u>angles</u> of half-lines. As they are in one-to-one correspondence with O^+, one can define in the set of angles a structure of <u>additive group</u>, the sum of two angles corresponding to the rotations θ, θ' being by definition the angle which corresponds to $\theta+\theta'$. From these definitions follow at once the fundamental formulae for angles, where $(\widehat{D,D'})$ designates the angle of the ordered pair (D,D'):

$$(\widehat{D,D'})+(\widehat{D',D''}) = (\widehat{D,D''}) \tag{9}$$

$$(\widehat{D,D}) = 0, \quad (\widehat{D',D}) = -(\widehat{D,D'}). \tag{10}$$

Furthermore, suppose we have fixed an orthonormal basis (a,b); then to each rotation θ are associated two numbers $c(\theta)$, $s(\theta)$; if φ is the angle corresponding to θ (also called the "angle of θ"), we define $\cos\varphi = c(\theta)$, $\sin\varphi = s(\theta)$ it being understood that these functions are relative to the given orthonormal basis (a,b); formulas (6), (7) and (8) become then the fundamental trigonometrical formulae, from which all others are derived.

The question immediately arises how do the trigonometric functions of an angle (or the numbers $c(\theta)$, $s(\theta)$ for a rotation, which is the same thing) depend on the chosen orthonormal basis. The answers follow from:

7) The group of rotations has two transitivity classes on the set of all orthonormal bases.

Indeed, given two orthonormal bases (a,b), (a',b'), there is a rotation θ such that $\theta(a) = a'$, hence one can already suppose that $a' = a$, and then of course one must have $b' = b$ or $b' = -b$, and there is no rotation transforming (a,b) into (a,-b), hence the result.

The two classes of orthonormal bases under the group of rotations are called the orientations of the plane, and orienting the plane is choosing one of these classes. The answer to our original question is then:

8) The cosine of an angle does not depend on the orthonormal basis of the plane; the sine changes its sign if the orthonormal basis is replaced by one of different orientation and is unchanged if it is replaced by an orthonormal basis of same orientation.

Indeed, one immediately verifies that for any rotation θ, $c(\theta) = \theta(x)\cdot x$ for every vector of unit length, hence is independent of any chosen basis; the second assertion is easily verified.

IV. Similarities and complex numbers.

We now look for all linear transformations preserving orthogonality.

9) Any bijective linear transformation preserving orthogonality can be written in one and only one way as $u = hs$, where h is a homothetic mapping of positive ratio, and s an orthogonal transformation; furthermore one has $sh = hs$.

Indeed, let (a,b) be an orthonormal basis; then the vectors $a' = u(a)$, $b' = u(b)$ are orthogonal by assumption; write $a' = \|a'\|c$, $b' = \|b'\|d$, so that (c,d) is an orthonormal basis; hence (by (7)) there is an orthogonal transformation s such that $s(a) = c$, $s(b) = d$, and the mapping $h = s^{-1}u$ is such therefore that $h(a) = \alpha a$, $h(b) = \beta b$, where $\alpha > 0$ and $\beta > 0$. By assumption h must preserve orthogonality; now a+b and a-b are orthogonal, we get $\alpha^2 = \beta^2$, hence $\alpha = \beta$ since both are > 0, and h is a homothetic mapping, which commutes with s. The uniqueness property follows from the fact that the identity is the only orthogonal transformation which is a positive homothetic mapping, as follows from (5).

Bijective linear transformations preserving orthogonality are called <u>similarities</u>; they form a group which, by 9), is a good example of the general notion of "direct product" of two groups. The ratio of h in u = hs is also called the <u>ratio</u> of u. A similarity u = hs is said to be <u>direct</u> if s is a rotation, or equivalently if $\det u > 0$; the group S^+ of direct similarities is the direct product of O^+ and of the multiplicative group R_+^* of positive numbers, hence is commutative; the angle of s is then also called the <u>angle</u> of the direct similarity u.

10) <u>The group S^+ is simply transitive on the set of all vectors $z \neq 0$ in the plane.</u>

Let (a,b) be an orthonormal basis; one needs only prove that there is one and only one direct similarity u = hs such that $u(a) = z$. Write $z = \|z\|\zeta$; as h has positive ratio that ratio is necessarily $\|z\|$, and then one must have $s(a) = \zeta$; the existence and uniqueness of s have been proved in 5). If $z = \alpha a + \beta b$, the matrix of u is immediately verified to be (using formula (5))

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \tag{11}$$

For any $z \neq 0$, write σ_z the unique direct similarity such that $\sigma_z(a) = z$; extend the bijective mapping $z \to \sigma_z$ to the whole plane by defining σ_0 (the "improper similarity") as the linear mapping 0; then we have without restriction on the vectors z, z'

$$\sigma_z + \sigma_{z'} = \sigma_{z+z'}. \tag{12}$$

Furthermore, the product $\sigma_z \circ \sigma_{z'}$ is again a direct similarity or 0 (the latter if and only if $z = 0$ or $z' = 0$). Hence the set Σ, union of S^+ and $\{0\}$, or, equivalently, the set of <u>all</u> matrices (11) (α and β <u>arbitrary</u> real numbers) is a <u>ring</u>, which is in one-to-one correspondence with the whole plane. If we <u>define</u> zz' as the unique z'' such that $\sigma_{z''} = \sigma_z \circ \sigma_{z'}$, we have defined a structure of <u>ring</u> on the plane, and for that structure (and the given orthonormal basis) the vectors take the name of <u>complex numbers</u>; the vector a is then the unit of the ring, hence written 1, and one has $b^2 = -a$, hence b is written i, so that any complex number takes the familiar form $z = \alpha + \beta i$. One writes $e(\varphi)$ the vector ζ such that σ_ζ is the rotation of angle φ, and one has then by definition

(13) $$e(\varphi + \varphi') = e(\varphi)e(\varphi')$$

(14) $$e(\varphi) = \cos\varphi + i\sin\varphi ,$$

whence the definition of the norm and amplitude of a complex number, de Moivre's and Euler's formulae, etc.

<u>V. Further topics.</u>

Once the fundamental notions have been defined, one should also study the following questions:

A) <u>More details about the group of isometries</u>: symmetries with respect to a line, decomposition of an isometry in product of symmetries, the group generated by translations and similarities, etc.

B) <u>Angles of lines</u>: in the set of homogeneous lines, the group of rotations is no longer simply transitive, since the rotation $x \to -x$ leaves every line invariant; this introduces an excellent example of a quotient group $O^+/\{-1,+1\}$. Two ordered pairs of lines are then equivalent if they are transformed one onto the other by a rotation, and the classes of equivalence are the <u>angles</u> of lines, on which there is a natural structure of additive group, isomorphic to $O^+/\{-1,+1\}$. There are interesting relations between angles of half-lines and angles of lines, in particular the mapping which to each rotation s associates the angle of the two lines such that s is the product of the symmetries with respect to these two lines, and yields an isomorphism of O^+ onto $O^+/\{-1,+1\}$ (usually wirtten $\varphi \to \varphi/2$).

C) Order relation between angles. Of course, there is no order relation in the whole group of angles of half-lines, which contains elements of finite order. One can, however, order the set of half-lines distinct from a given half-line D_0, the simplest way being through the consideration of the stereographic projection of the circle from the viewpoint intersection of that circle and D_0.

D) "Measure" of angles. One will have observed that such a notion has not been needed anywhere in the previous developments, and in fact is completely irrelevant to the use of angles in geometry; its real use comes with analysis and kinematics. The theorem to be proved is the existence of a continuous homomorphism $x \to \zeta(x)$ of the additive group R onto the multiplicative group of complex numbers of absolute value 1. There are various ways of proving that existence, all of which seem to me above the level of secondary schools. If it is felt that at that level the theorem is needed, it should be carefully stated, and admitted without proof.

VI. Pitfalls and nonsense about angles. In the usual teaching of plane geometry, it is hard to find a chapter which is so utterly silly and nonsensical as the one on angles, giving such a perfect example of the horrible mess which passes for a "rigorous" science. To begin with, there are about as many definitions of the angle of two half-lines as there are textbooks. Some call an angle the "figure" (whatever that may mean) consisting of the two half-lines, without usually considering the order in which these half-lines are taken; for others it is the part of the plane "between" the two half-lines, that notion being of course undefined, and usually the fact that, even intuitively speaking, there are two possible candidates satisfying the definition, remains completely disregarded.

Next comes the "sum" of angles. It is of course implicitly admitted that such an operation can be iterated an arbitrary number of times, and no book will retreat before the statement that a certain "sum" of angles is equal, say, to 7 right angles; what that may possibly mean in either "definition" adopted is left for the unahppy reader to guess, and he will be lucky if he can find a way out of a situation in which two given half-lines determine an "angle" which has an arbitrary number of "values".

It is as if the textbooks implicitly considered that "figures" have a memory of their past existence, and a half-line remembered how many times it had turned before occupying a given position! One could just as well accept Humpty-Dumpty's definition of "truth"!!

Thus launched on their brilliant career, the textbooks then decide that as mathematics only deals with "measurable" quantities (a notion which they studiously refrain from defining!) it would be intolerable that angles should not be "measurable", and therefore they proceed to "define" their "measure" before attempting to do anything with the notion. The so-called "proofs" they pretend to give to that effect defy any logical analysis, as neither assumption nor conclusion are clearly stated, and all sorts of fancy assertions are made without reference or attempt of proof, for instance, the fact that any angle can be "divided" in an arbitrary number of equal parts, not to speak of the order relation between angles, etc.

And so on, for pages and years; no wonder that when, much later, "trigonometry" is introduced, it looks to most students as such a formidable theory, and that complex numbers are considered so mysterious that most secondary schools even make no attempt at defining them. What is more remarkable is that some people are able to submit to that treatment and still become good mathematicians.

It is of course a perfectly legitimate opinion to maintain that secondary schools should have nothing to do with the "hair-splitting" niceties of professional mathematicians, and should be content with teaching mathematics on an intuitive basis, as a branch of physics for example. There would be no quarrel with that method if its nature and aims were made clear to everybody, and every pretense at mathematical "rigor" was deliberately abandoned. What is hard to swallow is a situation in which students are for years submitted to what can only be characterized as a systematic training in intellectual dishonesty.

DISCUSSION FOLLOWING PROFESSOR DIEUDONNÉ'S LECTURE

Dieudonné: We shouldn't discuss here whether we shall "parachute" the axioms, as I have done, or we shall introduce them gradually as Pickert did. The important thing is the final product. We must avoid the gap between school and university, and consequently it is necessary that the students have a clear conception of angles when they finish school.

Servais: I don't think that it is necessary to go as far as Dieudonné in order to obtain the conception of angles. I think that the angles disappear if we only talk about rotations. And I miss the connection to the intuitive perception of angles.

Dieudonné: What I talked about is intended for the oldest classes in the gymnasium, and I presuppose a long process of familiarization with the ideas of angles. We can use many different approaches, but we cannot avoid to talk about the group of rotations if we want to give a mathematically correct presentation.

Freudenthal: There are serious difficulties: 1) Classes of equivalence. Equivalence relations aren't difficult, but it is difficult to manipulate with the set of classes. 2) Rotations. We could avoid some of these difficulties by introducing complex numbers.

There are four different ways of talking about angles in school: 1) in elementary geometry, 2) in analytic geometry, 3) in trigonometry, 4) in solid geometry. The angles constitute a good subject in school, not for watertight proofs, but we can analyse the different situations where we use the concept of angles.

Why do we only consider angles in the plane? Angles in space are just as important.

Dieudonné: It will take too much time in school to discuss the various concepts of angles; also angles in the space are too difficult.

Servais: What about ordering of angles?

<u>Pickert</u>: We can define an angle as the convex region between two half-lines with common end point. Then we have only angles $< 180^{\circ}$, and here we have an ordering. Some angles can be added, others cannot. The set of angles doesn't constitute a semi-group but it can be embedded in one, or in a group.

Here followed a rather heated discussion about the sum of the angles in a pentagon.

\- - -

<u>Bunt</u>: In school we teach euclidean geometry up to the age of 16. Why not utilize this when we want to present an axiomatic treatment of geometry? I don't think that we can teach geometry without triangles, but I suspect that the subject "triangles" in teaching mathematics in France is different from the corresponding subject in other countries. This may account for some of the differences of opinion between Dieudonné and others.

<u>Dieudonné</u>: There are two things which I consider important: 1) The pupils should as soon as possible reach the modern concepts in mathematics, and the applications in physics. 2) We must not cheat at any time.

It is impossible to learn quantum theory without knowledge of the transformation group, but the triangles are quite useless.

\- - -

<u>Rindung</u>: We have here seen sine and cosine defined without use of measures of angles. How shall we then treat the trigonometric functions in calculus?

<u>Dieudonné</u>: We have to show that there exists one and only one continuous mapping of the set of real numbers into the set of rotations with the following properties:

1) $(x + x') = (x) \quad (x')$

2) $(\frac{1}{2}\quad) = \theta_o$,
where θ_o is the rotation for which
$c(\theta_o) = 0$ and $s(\theta) = 1$ (cf. p.)

3) $(x) \neq \theta_o$, when $0 < x < \frac{1}{2}$

Then we can define

$$\cos x = c(\quad (x)).$$

(Actually this comes down to integrating the differential equation $\frac{dz}{dt} = z$, where z is a complex function).

Pickert: We could also introduce Arctan by

$$\text{Arctan } x = \int_0^x \frac{dx}{1+x^2}$$

and derive the rest from here.

\- - -

Pickert: There is a psychological difficulty in speaking about rotations; the pupils consider rotation a physical process, and they don't understand why there is only one rotation which maps one given line into another.

Choquet: Perhaps one could make it easier by speaking about "movement" and "family of movements".

Freudenthal: It is dangerous with too radical changes. We don't obtain anything by introducing too much too early without thinking about the psychological and the pedagogical problems.

We don't know anything definite about how to teach groups; and even the best way of teaching transformations has not been discussed among teachers. There are many who think that a transformation moves some figure, but not the whole plane.

Dieudonné: There are many psychological difficulties; but we don't get anywhere if we are too cautious. There must come a change. Many physics students regret that they have not learnt anything about matrices, groups, Hilbert spaces - only triangles and conics. 20 years ago this was no problem, because physics used only classical mathematics at that time.

Bundgaard: How long a time would it take to teach geometry in the way that Dieudonné wants?

Dieudonné: Between 6 months and one year.

Bundgaard: This is a very large part of the three years in the gymnasium, considering that there are many other important subjects. But of course many notions etc. of general importance would have to be dealt with in connection with such a treatment of geometry. By the way, I am surprised that Dieudonné only wants to stick to examples. One could easily treat the abstract concepts, e.g. equivalance classes.

It would be valuable to know opinions about which mathematical subjects should be taught to pupils who are not going to study mathematics later on.

Dieudonné: All students should know something about mathematics of today. The question of a good syllabus could best be solved by a group of mathematicians who carefully examined the possible subjects.

Freudenthal: From trigonometry and the oldfashioned analytic geometry the pupils learn something about algebraic procedure (elimination of parameters, mathematical formulation of a problem, etc.)

Much harm could be done by introducing new subjects in the school if the teachers don't know these subjects. Then it is better to wait until the students reach the university. It is more important to abandon obsolete subjects than to introduce new ones.

Dieudonné: Concerning the teachers I am not as pessimistic as Freudenthal. Of course we must let the old teachers teach in the way they are used to.

Rindung: We must take the risk that the teaching isn't very good at the beginning when we introduce new subjects, but still this is preferable to good teaching of subjects that are of little use or value.

Bundgaard: In order to renew the mathematics teaching in school it is necessary that the teachers at school and at universities cooperate. We must work on improvements of the relations between these two kinds of teachers now and in future. I can mention that in Scandinavia we have had some rather promising experience with courses for teachers in the gymnasium.

RECHERCHE D'UNE AXIOMATIQUE COMMODE POUR LE PREMIER ENSEIGNEMENT DE LA GEOMETRIE ELEMENTAIRE *

par Gustave CHOQUET

1. INTRODUCTION.

Nous ne discuterons pas ici de la nécessité d'un enseignement de la géométrie élémentaire; nous étudierons seulement la facon dont peut être fait cet enseignement.

Il y a maintenant un accord assez unanime, dans tous les pays, sur les deux principes suivants:

1) Pour les jeunes enfants, l'enseignement de la géométrie ne peut être déductif. Ce doit être un enseignement basé sur l'observation du monde physique; son but est l'élaboration des concepts fondamentaux à partir de l'expérience.

2) Pour le mathématicien, la facon la plus élégante, la plus profonde, la plus rapide, de définir le plan (ou l'espace), est de le définir comme espace vectoriel sur R , à deux (ou 3) dimensions, muni d'un produit scalaire, c'est-à-dire d'une forme bilinéaire symétrique u.v. telle que $u.v > 0$ pour tout vecteur $u \neq 0$.

C'est aussi la définition qui se prête le mieux à des généralisations fécondes (espaces R^n, C^n, espace de HILBERT, etc ...).

De nombreux professeurs de l'enseignement du second degré témoignent, par leur expérience, que cette définition peut être déjà utilisée avec grand profit par des élèves de 17 ans (classe terminale des lycées) ayant étudié antérieurement le produit scalaire. Cette méthode permet dans cette classe une économie de pensée considérable, et conduit tout naturelle-

*) Ce texte contient la substance de deux conférences données en Janvier et Février 1960 au Séminaire de Pédagogie mathématique de l'E.N.S. de SAINT-CLOUD.

ment à des démonstrations basées sur de véritables méthodes. Elle apporte en même temps au professeur de physique une aide précieuse, puisqu'elle lui permet de définir et d'étudier enfin correctement les notions de travail, de barycentre, de résultante de forces.

Le problème est moins simple aux âges intermédiaires, disons entre 13 et 16 ans. L'enfant commence à comprendre ce qu'est une démonstration; chez certains s'éveille une véritable soif de logique, indiquant que le temps est venu d'aborder sérieusement le raisonnement déductif. On va donc faire établir par l'enfant des morceaux de raisonnement déductif, en prenant soin de lui faire toujours préciser ses prémisses.

Il est donc indispensable que le maître de ces enfants dispose d'une axiomatique sous-jacente complète. Diverses expériences ont d'ailleurs montré le goût que manifestent certains enfants, pour une axiomatique précise; pour ceux-ci les mathématiques apparaissent comme un jeu aux règles strictes et ils ont une grande joie à jouer correctement ce jeu. Il nous faut donc trouver une axiomatique <u>simple</u>, aux axiomes <u>forts</u>, c'est-à-dire donnant très vite accès à des théorèmes non évidents, et <u>intuitifs</u>, c'est-à-dire traduisant des propriétés de l'espace physique faciles à vérifier. Peu importe qu'ils ne soient pas indépendants. Certains professeurs ont préconisé de prendre au départ de très nombreux axiomes; nous ne pensons pas que ce soit désirable: le jeu mathématique basé sur trop de règles, devient complexe et prend une allure de fragilité et d'incertitude.

Il est bien établi que l'"axiomatique" d'EUCLIDE ne repond plus à nos exigences logiques; on peut en dire autant de bien des "axiomatiques" qu'on trouve dans les manuels d'enseignement; notons toutefois qu'un effort notable se manifeste dans les manuels parus ces dernières années.

On sait que HILBERT a élagué et complété l'axiomatique d'EUCLIDE, pour en faire un système logiquement satisfaisant; sa préoccupation essentielle n'était pas l'enseignement élémentaire; aussi les développements de forme élémentaire, qui ont été donnés à son axiomatique (voir par exemple la Géométrie Rationnelle de HALSTED, chez GAUTHIER-VILLARS) sont-ils mal adaptés à l'enseignement.

L'axiomatique d'EUCLIDE-HILBERT est basée sur les notions de longueur, d'angle de triangle. Elle cache à merveille la structure vectorielle de l'espace, au point que de nombreux siècles ont ignoré la notion de vecteur. Le fait qu'un triangle soit la moitié d'un parallélogramme n'a pas empêché qu'on mette l'accent pendant plus de vingt siècles sur l'étude détaillée des hauteurs, médianes, médiatrices et bissectrices des triangles, sur les cas d'égalité des triangles, et sur les relations métriques dans le triangle. On voyait le triangle,mais non le parallélogramme qui aurait pu conduire aux vecteurs.

Dans une conférence récente à un Séminaire de l'O.E.C.E., M. DIEUDONNE s'écriait: "A bas EUCLIDE, plus de triangles". Certes le triangle gardera toujours une place intéressante, due à ce qu'il est le polygone plan le plus simple, qu'un triangle détermine un plan et un seul, et qu'il est indéformable. Aussi y a-t-il sans doute une exagération voulue dans l'exclamation de M. DIEUDONNE. Il n'en reste pas moins vrai qu'il faut freiner le goût pervers qui entraîne vers les points remarquables du triangle, et vers des relations métriques parfois élégantes,mais inutiles.

Notre faveur doit aller à des méthodes qui reposent sur les notions fondamentales que vingt siècles de mathématiques ont fini par dégager: notion d'ensemble, relations d'ordre, d'équivalence, loi algébrique, espace vectoriel, symétrie. Non seulement ces méthodes permettront d'utiliser très tôt les outils simples et efficaces de l'algèbre, apportant ainsi une économie de pensée; mais par le recours qu'elles supposent à des notions fondamentales, elles enrichiront la structure mentale de nos élèves et les prépareront aux tâches de l'avenir.

2. UN FIL DIRECTEUR VERS UNE BONNE AXIOMATIQUE.

Comment construire une axiomatique qui satisfasse à nos exigences? Nous aimerions qu'elle permette de dégager commodément la structure vectorielle de l'espace ainsi que l'existence et les propriétés du produit scalaire.

Nous pouvons donc résumer ainsi la situation: nous connaissons une voie royale basée sur les notions "espace vectoriel et produit scalaire"; mais ces notions ne peuvent être "parachutées" sans préparation, surtout à un âge où l'on ne possède pas bien la notion d'opération algébrique.

Toutefois elles vont nous servir de fil directeur. Nous essayerons d'habiller sobrement un squelette logique parfait, mais trop abstrait pour l'enfant, pour en faire un être d'aspect familier et accueillant.

Analysons brièvement les notions de base:

a) Celle d'espace vectoriel repose essentiellement sur la notion d'addition, à la fois addition sur la droite, et addition de vecteurs, cette dernière est réductible à la notion de parallélisme ou à celle de milieu de deux points.

b) Un produit scalaire est une fonction bilinéaire et symétrique; on voit le rôle de l'addition; puis une notion nouvelle, celle de symétrie, à laquelle nous ne saurions échapper.

c) Un produit scalaire est positif, en ce sens que $u.u > 0$ pour tout $u \neq 0$.

Nous sommes donc amenés à baser notre axiomatique sur la structure additive de la droite, la parallélisme et la symétrie.

Les manuels d'enseignement utilisent tous la symétrie - ils ne sauraient y échapper - ; mais peu la font intervenir dans leurs axiomes; leur axiomatique explicite est donc insuffisante, et ils se privent d'un outil puissant. On rencontre fréquemment la situation paradoxale suivante: le professeur étudie avec ses élèves une figure dotée d'un axe de symétrie évident; pour établir l'égalité de deux segments, la tendance naturelle de l'élève est d'utiliser cette symétrie; son professeur le lui interdit au profit d'un cas d'égalité de triangles. Ne parlons pas de la faute pédagogique ainsi commise; mais d'une part, le professeur oublie que sa démonstration des cas d'égalité des triangles était basée implicitement sur la symétrie; d'autre part, il présente les mathématiques comme un jeu vain dans lequel des propriétés évidentes doivent être démontrées à partir d'autres propriétés qui le sont beaucoup moins.

Il faut réagir énergiquement contre cette peur de la symétrie et donner à celle-ci, dès le départ, la place importante qu'elle mérite.

Il nous reste à traduire dans notre axiomatique la positivité du produit scalaire. Elle suppose un ordre sur le corps des scalaires, ce qui va se traduire par un axiome d'ordre sur les droites. Mais aussi elle permet de définir une norme sur l'espace, donc aussi une distance satisfaisant à l'inégalité triangulaire. Nous pourrons donc être amenés à introduire cette inégalité triangulaire si les autres axiomes, ne sont pas assez forts pour l'entraîner.

Nous voulons présenter ici deux axiomatiques construites à partir de ces principes.

La première met l'accent sur les propriétés métriques du plan, et sur la symétrie(1). La seconde a un point de départ

---

(1) Cette axiomatique est une refonte d'une axiomatique présentée antérieurement (sur l'enseignement de la géométrie élémentaire, par Gustave CHOQUET, p. 75-129, dans l'"Enseignement des Mathématiques", chez DELACHAUX et NIESTLE, NEUFCHATEL et PARIS).

La simplification apportée ici résulte de l'introduction de l'axiome d'incidence I_b concernant les parallèles, et de la transformation de l'inégalité triangulaire en une inégalité plus stricte. En outre, notre nouvelle axiomatique évite la maladresse antérieure consistant à définir les droites comme ensembles isométriques à une droite particulière.

affine; les notions métriques y sont nettement séparées des notions affines dans les axiomes, et en fait les premiers axiomes suffisent à étudier entièrement la structure vectorielle du plan.

Toutefois ces deux axiomatiques possèdent un tronc commun, les axiomes d'incidente I et les axiomes d'ordre II. Ces derniers axiomes semblent devoir figurer dans toute axiomatique raisonnable du plan. Nous attirons l'attention sur l'axiome d'incidence I_b qui affirme que par tout point il passe une parallèle et une seule à une droite donnée. Le postulatum d'EUCLIDE affirmait: "Il passe au plus une parallèle", son existence pouvant être démontrée grâce aux autres axiomes. Nous avons estimé que la réunion, dans un même axiome, de l'existence et de l'unicité, apportait une grande simplification au développement de la géométrie, et que d'autre part bien peu d'enfants jusqu'a 16 ans sont sensibles à la démonstration d'une existence qui a, pour eux, un caractère au moins aussi expérimental que l'unicité.

Nous n'étudierons dans ce travail que l'axiomatique du plan; nous nous contenterons d'énoncer les quelques axiomes supplémentaires qui permettent d'obtenir l'espace à partir du plan; nous pensons d'ailleurs que l'étude de l'espace plus encore que celle du plan doit être basée sur l'algèbre vectorielle et le produit scalaire, et que l'intuition de l'espace doit être développée, non par l'usage de démonstrations dites "synthétiques", mais par la manipulation d'un matériel concret, et par le dessin perspectif.

Nos deux axiomatiques du plan sont bâties sur le schéma suivant: Le plan est un ensemble dont les droites sont certains sous-ensembles. Chaque droite est munie d'une structure d'ordre et d'une structure algébrique. Pour chaque droite, ces deux structures sont reliées par des axiomes de compatibilité. En outre les structures des diverses droites sont reliées entre elles par des axiomes convenables.

Par contre, les axiomes d'incidence ne supposent aucune structure sur les droites; ils précisent simplement le degré de rareté des droites et des couples de parallèles.

On verra que des seuls axiomes I et II résultent déjà de nombreuses propriétés qu'on a coutume de croire liées à la structure affine ou métrique du plan.

L'exposé qui suit l'énoncé des axiomes n'est pas un abrégé de géométrie élémentaire; à fortiori n'est-il pas un début de manuel. Il s'adresse aux professeurs en tant que mathématiciens, et il vise seulement à montrer, d'une part l'identité du plan que définissent ces axiomes avec le plan classique, d'autre part la simplicité des démonstrations de quelques théorèmes fondamentaux.

Seule une expérimentation assez vaste, basée sur un exposé détaillé pourra, ultérieurement, permettre un choix entre les deux axiomatiques proposées et leurs variantes possibles.

3. LE ROLE DES NOMBRES EN GEOMETRIE.

Les Grecs n'ont longtemps connu que les nombres rationnels et même après leur découverte mémorable de l'irrationalité de $\sqrt{2}$, ils n'ont pas su dégager la notion générale de nombre; la notion de nombre est restée pour eux liée à la géométrie. Les continuateurs d'EUCLIDE ont tenté de perfectionner son oeuvre en mettant au point un "calcul segmentaire" qui permet de retrouver, mais bien péniblement, la structure de corps de l'ensemble des nombres à partir de la géométrie plane.

Nous ne devons à aucun prix tomber dans cette erreur. Le plus tôt possible l'enfant doit concevoir l'ensemble des nombres comme corps commutatif totalement ordonné: ceci veut dire qu'il doit prendre conscience que, lorsqu'il calcule, il n'utilise, de l'addition et de la multiplication qu'un petit nombre de propriétés - celles que les mathématiciens appellent axiomes des corps commutatifs totalement ordonnés.

Plus tard, selon les besoins, on introduira l'axiome d'ARCHIMEDE, (par exemple sous la forme: Tout nombre est majoré par un nombre entier) ou l'axiome plus fort de continuité (par exemple sous la forme: Tout ensemble majoré a un majorant plus petit que tous les autres).

Certes l'enseignement de la structure algébrique des opérations peut être illustré par un recours à la droite: mais il ne s'agit pas là de géométrie plane. Ce que nous devons exclure c'est un recours à un calcul segmentaire utilisant des notions déjà élaborées de géométrie plane: parallèles, sécantes, voir même perpendiculaires.

4. TRONC COMMUN DES AXIOMATIQUES DU PLAN.

Un plan est un ensemble Π muni d'une structure par la donnée d'un ensemble $\mathcal{D}$ de parties de Π appelées droites, dont chacune est elle-même munie d'une structure que vont préciser les axiomes, les structures des diverses droites étant reliées par d'autres axiomes qu'on pourrait appeler axiomes de passage.

Pour simplifier l'exposé, nous supposerons dès le départ que Π contient au moins deux droites et que toute droite contient au moins deux points.

Définition: 1) On dit que deux droites D_1, D_2 de Π sont parallèles, et on écrit $D \parallel D'$ si
ou bien $D_1 = D_2$, ou bien $D_1 \cap D_2 = \emptyset$.

2) Deux droites non parallèles sont dites sécantes.

3) On dit qu'une droite D passe par un point a si $a \in D$.

I. AXIOME D'INCIDENCE.

a) Pour tout couple (a,b) de points distincts de Π , il existe une droite et une seule contenant a et b.

b) Pour toute droite D et pour tout point a , il passe par a une parallèle et une seule à D .

Si a,b sont deux points distincts de Π , on notera $D(a,b)$ la droite qui passe par a et b .

Conséquences immédiates:

1) Le parallélisme est une relation d'équivalence sur $\mathcal{D}$; chacune des classes associées à cette relation s'appelle une direction. Il est immédiat qu'il existe au moins deux directions.

2) Soit D une droite, et δ' une direction distincte de la direction de D. Pour tout $m \in \Pi$, la droite de direction δ' passant par m rencontre D en un point $\varphi(m)$. L'application φ de Π sur D s'appelle projection oblique de Π sur D parallèlement à δ' (lorsque δ' est la direction d'une droite D', on dit aussi parallèlement à Δ').

3) Soient D_1, D_2 deux droites sécantes. Pour tout $m \in \Pi$ on désigne par m_1, m_2 les projections obliques de m sur D_1, D_2 parallèlement à D_2, D_1 respectivement. L'application $m \to (m_1, m_2)$ de Π sur l'ensemble produit $D_1 \times D_2$ est biunivoque. On dit que le couple D_1, D_2 est un système d'axes de coordonnées de Π.

Exercices:*

1) Soit δ une direction; pour tous $a, b \in \Pi$, on dira que $(a \sim b)$ s'il existe une droite de direction δ contenant a et b. Montrer que cette relation binaire sur Π est une relation d'équivalence. Quelles en sont les classes?

2) Montrer que pour tout couple D_1, D_2 de droites distinctes, il existe au moins une direction δ distincte de celles de D_1 et D_2.

En déduire, grâce à une projection oblique, que toutes les droites ont même nombre cardinal α.

Montrer que l'ensemble des directions a pour nombre cardinal $(\alpha + 1)$.

3) Soit K un corps commutatif; on appelle droite de K^2 toute partie de K^2 définie par une relation de la forme $a_1 x_1 + a_2 x_2 = b$ ($a_1, a_2, b \in K$ et non tous nuls). Montrer que K^2 muni de ces droites satisfait aux axiomes I.

4) Etudier en particulier le cas, où K est un corps commutatif fini (par exemple l'ensemble des entiers modulo-p, où p est premier) et le cas où K = le corps C des nombres complexes.

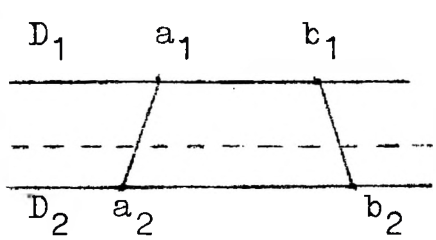
---

*) La plupart des exercices ne sont destinés qu'aux professeurs; en tous cas, leur adaptation à l'enseignement nécessiterait des développements préliminaires.

II. AXIOMES D'ORDRE.

II_a. A chaque droite D sont associées deux structures d'ordre total sur D, opposées l'une de l'autre.

La droite D munie de l'un de ces ordres s'appelle une droite orientée. Si $a \neq b$, par l'expression droite orientée, $D(a,b)$ on entend la droite D munie de celui de ses ordres tel que $a \prec b$. On appelle intervalle fermé $[a,b]$ l'ensemble $\{a\}$ si $a = b$, ou sinon l'ensemble des points x de la droite $D(a,b)$ tels que $a \prec x \prec b$ pour l'une des orientations de $D(a,b)$. On dit que x est entre a et b si $x \in [a,b]$. On définit de même les intervalles ouverts, les demi-droites ouvertes et fermées. On peut aussi définir la convexité: l'ensemble $X \in \Pi$ est convexe s'il contient $[a,b]$ dès qu'il contient a et b.



II_b. Pour tout couple (D_1,D_2) de parallèles distinctes, et pour tous points a_1, a_2, b_1, b_2 tels que $a_i, b_i \in D_i$, $(i = 1,2)$, toute parallèle à ces droites qui rencontre $[a_1,a_2]$ rencontre aussi $[b_1,b_2]$.

Cet axiome II_b pourrait être mis sous de nombreuses formes équivalentes dont l'une est l'axiome de PASCH classique (toute droite qui rencontre un côté d'un triangle en rencontre aussi un autre). Il nous a semblé que l'énoncé II_b était plus intuitif.

Conséquences immédiates des axiomes I et II.

1) Soient D_1, D_2 deux droites orientées; pour toute direction δ distincte des directions de D_1 et D_2, la projection oblique de D_1 sur D_2 parallèlement à δ est un isomorphisme (pour l'ordre) ou un anti-isomorphisme.

Cet énoncé est une conséquence immédiate de II_b; plus précisément il lui est équivalent.

2) Pour toute droite D , il existe une partition unique de $(\Pi - D)$ en deux ensembles convexes A_1 et A_2 . Plus précisément A_1 et A_2 sont les classes d'équivalence de la relation ainsi définie par $(\Pi - D)$:

$$(a \sim b) \qquad \text{si} \quad [a,b] \cap D = \emptyset \ .$$

On les appelle <u>demi-plans ouverts</u>; les ensembles $(A_1 \cup D)$ et $(A_2 \cup D)$, appelés demi-plans fermés sont également convexes.

Ce résultat de base s'obtient ainsi: soit D' une sécante de D , et D'_1, D'_2 les demi-droites ouvertes de D' ayant leur origine en $D \cap D'$. On note A_i $(i = 1,2)$ la réunion des parallèles à D qui rencontrent D'_i; l'axiome II_b montre immédiatement que A_1 et A_2 sont les classes d'équivalence cherchées.

<u>Exercices.</u>

5) Montrer que, sauf dans le cas où le nombre cardinal des droites (voir exercice 2) vaut 2 (auquel cas Π est isomorphe à K^2 , où K est le corps des entiers modulo 2) , ce cardinal α est infini. Montrer qu'il en est de même du nombre cardinal de toute demi-droite et de tout intervalle ouvert non vide.

Plus précisément montrer que toute demi-droite ouverte et tout intervalle ouvert non vide est isomorphe, (pour l'ordre) à une droite.

6) On se place dans le cas $\alpha \neq 2$.

Montrer que tout demi-plan ouvert est non-vide.

Montrer que l'enveloppe convexe d'un ensemble fini (le plus petit convexe contenant cet ensemble) est l'intersection d'une famille finie de demi-plans fermés.

En particulier l'enveloppe convexe d'un ensemble de trois points non alignés $\{a, b, c\}$ est dite <u>simplexe</u> (a, b, c) .

7) Donner plusieurs définitions équivalentes de la <u>bande</u> plane définie par deux parallèles D_1, D_2 . Par la suite, on entendra par direction d'une bande, la direction des deux droites qui la définissent.

8) Soient O, a, b, trois points non alignés de Π ; soient $a' \in [0,a]$ et $b' \in [0,b]$. Montrer que pour tout $m \in [a,b]$, $[Om]$ et $[a',b']$ se rencontrent.

En déduire que la réunion des segments $[0,x]$ joignant un point O aux points d'un ensemble convexe, est convexe.

Etendre ce résultat à la réunion des segments joignant les points de deux convexes donnés.

9) On dit qu'une partie X de Π est <u>bornèe</u> si, pour toute direction δ , X est contenu dans une bande de direction δ .

Montrer que tout ensemble fini est borné.

Montrer que si X est contenu dans deux bandes de directions distinctes, X est borné.

Montrer que tout ensemble borné est contenu dans un simplexe.

lo) a) Définir une topologie sur une droite à partir de la notion d'intervalle ouvert.

b) Soient D_1, D_2 deux droites sécantes de Π ; en identifiant Π à l'ensemble $D_1 \times D_2$, définir sur Π une topologie d'espace produit, à partir des topologies de D_1 et D_2 . Montrer que cette topologie ne dépend pas du choix de D_1, D_2 .

11) Soit $X \subset \Pi$ et soient $a,b \in X$; on posera $(a \sim b)$ s'il existe un polygone d'extrémités a, b, dont les côtés sont contenus dans X . Cette relation est une relation d'équivalence sur X ; ses classes d'équivalence sont appelées les <u>composantes</u> de X .

Soit alors P un polygone <u>fermé</u> plan sans points doubles, c'est-à-dire dont deux côtés non consécutifs sont disjoints; soit C le contour de P (réunion des côtés de P). Montrer que $(\Pi - C)$ a exactement deux composantes, dont l'une est bornée; montrer que, pour la topologie de Π , chacune de ces composantes est ouverte et que tout point de C leur est adhérent (théorème de JORDAN).

La solution est élémentaire mais non immédiate; (on conseille de choisir une direction δ non parallèle aux côtés du polygone, et de mener les droites de direction δ par les sommets de P ; on ordonne l'ensemble de ces parallèles, et on examine ce qui se passe dans les bandes successives qu'elles déterminent).

12) Soit K un corps commutatif totalement ordonné ($a \leqslant b \implies a + x \leqslant b + x$ et $(0 \leqslant x,\ 0 \leqslant y) \implies (0 \leqslant xy)$). Définir sur K^2 une structure de plan satisfaisant aux axiomes I et II (revoir d'abord l'exercice 3).

Donner des exemples d'un tel corps K qui ne soit pas un sous-corps du corps R des réels.

13) Soit Π un disque ouvert du plan R^2 classique. Appelons "droite" de Π tout arc ouvert de cercle de Π dont les extrémités sont les extrémités d'un diamètre de Π, et munissons chacune d'elles de l'ordre naturel.

Montrer que Π satisfait aux axiomes I et II et qu'il n'est pas isomorphe (pour l'ordre) au plan R^2 bien que ses "droites" soient isomorphes à R .

Construire d'autres exemples analoques dans le disque ouvert Π , en prenant pour familles de "droites", certaines familles invariantes par rotation d'arcs ayant pour extrémités les extrémités d'un diamètre du disque. Pour vérifier si un tel plan est ou non isomorphe au plan classique, on conseille d'utiliser une propriété classique du réseau construit à partir de deux couples de parallèles.

5. AXIOMATIQUE A BASE METRIQUE.

Cette axiomatique est basée sur les axiomes I et II, sur l'axiome III de structure additive et métrique, et sur l'axiome IV de symétrie.

III. AXIOME DE STRUCTURE ADDITIVE ET METRIQUE.

Cet axiome utilise les nombres réels; il est donc nécessaire ici de supposer connu le corps R . En fait, le développement qui suit montrera qu'on peut aller très loin en utilisant seulement la structure de groupe additif totalement ordonné de R , et qu'on peut obtenir la structure vectorielle de Π et les propriétés du produit scalaire en utilisant seulement la structure de corps commutatif totalement ordonné et archimédien de R . Cette observation montre qu'on pourra, dans l'enseignement de 12 à 16 ans, éviter le recours au corps R complet et à l'une des notions suivantes qu'il implique, borne supérieure, coupure, suite croissante ou suite de CAUCHY.

AXIOME III. A Π est associée une application d de $\Pi \times \Pi$ dans R_+ , appelée distance et telle que:

a) $d(y,x) = d(x,y)$ pour tous x, y .

b) Pour toute droite D , tout $a \in D$, et tout nombre $\ell > 0$, il existe dans D , de chaque côté de a , un point b unique tel que $d(a,b) = \ell$.

c) $(x \in [a,b]) \Longrightarrow (d(a,x) + d(x,b) = d(a,b))$.

d) Pour tout triplet $\{a, x, b\}$ de points non alignés, on a:

$$d(a,b) < d(a,x) + d(x,b) \quad \text{(inégalité triangulaire stricte).}$$

Conséquences immédiates des axiomes I, II, III.

1) L'égalité $(a = b)$ équivaut à $(d(a,b) = 0)$. (Conséquence de $III_{a,b,c}$).

2) Pour trois points quelconques a, x, b de Π , on a

$$d(a,b) \leq d(a,x) + d(x,b) \ .$$

L'égalité équivaut à: $x \in [a,b]$.

3) Soit $X \subset \Pi$, et f une application de X dans Π ; on dit que f est une <u>isométrie</u> si

$$(a,b \quad X) \Longrightarrow (d(a,b) = d(f(a), f(b))) \ .$$

La remarque (3) ci-dessus montre que toute isométric conserve l'alignement et la relation "entre".

Il en résulte qu'elle transforme tout intervallc en intervalle, toute droite en droite, deux droites parallèles en deux droites parallèles, tout demi-plan en demi-plan.

Toute isométrie de Π dans Π est une isométrie <u>sur</u> Π , et c'est une isomorphie pour la structure définie par les axiomes I, II, III.

<u>Exercices.</u>

14) Soient A_1 et A_2 deux plaques polygonales convexes bornées telles que $A_1 \subset A_2$. Montrer que si ℓ_1 et ℓ_2 désignent les longueurs des contours de A_1, A_2, on a $\ell_1 \leq \ell_2$, avec égalité stricte lorsque $A_1 \neq A_2$.

Cette propriété permettrait de définir aisément la longueur des contours d'ensembles convexes bornés.

Pour énonces commodément le dernier axiome, on désignera par $\Pi_1(D)$ et $\Pi_2(D)$ les demi-plans ouverts définis par une droite D , et nous appellerons <u>pliage</u> autour de D toute isométrie φ de $D \cup \Pi_1(D)$ sur $D \cup \Pi_2(D)$ telle que pour tout $x \in D$, on ait $\varphi(x) = x$.

IV. AXIOME DU PLIAGE (OU DE SYMETRIE).

Pour toute droite D, il existe au moins un pliage autour de D.

Nous démontrerons l'unicité du pliage autour de D ; nous ne la postulons pas dans l'axiome IV parce que sa démonstration est très simple.

THEOREMES FONDAMENTAUX QUI DECOULENT DES AXIOMES I, II, III, IV.

Lemme 1. Pour toute droite D, il existe un seul pliage autour de D.

Soient $\Pi_1(D)$ et $\Pi_2(D)$ les demi-plans ouverts définis par D ; soit φ un pliage autour de D et soit $a \in \Pi_1(D)$; on pose $a' = \varphi(a)$. L'intervalle $[a,a']$ rencontre D en un point p ; tout point m de D distinct de p est hors de $[a,a']$ donc:

$$d(a,a') < d(a,m) + d(m,a') = 2d(a,m)$$

Or $d(a,a') = 2d(a,p)$; il en résulte $d(a,p) = d(a,m)$.

Le point p possède la propriété caractéristique, indépendante du choix de φ, d'être le point de D le plus proche de a ; on dira que p est la projection orthogonale ou plus brièvement la projection de a sur D. Cette projection est milieu de a,a' ; donc le point a', symétrique de a par rapport à p sur la droite contenant a et p, est indépendant de φ, autrement dit φ est unique.

Désignons maintenant par $\hat{\varphi}$ le prolongement de φ à Π ainsi défini:

$$\hat{\varphi}(m) = \varphi(m) \qquad \text{pour tout } m \in D \cup \Pi_1(D)$$

$$\hat{\varphi}(m) = \varphi^{-1}(m) \qquad \text{pour tout } m \in \Pi_2(D) .$$

<u>Lemme 2. Le prolongement $\hat{\varphi}$ de φ est une isométrie de Π sur Π . On appellera cette isométrie la symétrie par rapport à D .</u>

D'abord il est immédiat que $\hat{\varphi}$ est une application de Π sur Π .

Puis soient $a, b \in \Pi$.

Si $a, b \in D \cup \Pi_1(D)$, on a bien $d(\hat{\varphi}(a), \hat{\varphi}(b)) = d(a,b)$ puisque $\hat{\varphi} = \varphi$ sur $\{a,b\}$.

Même conclusion si $a, b \in D \cup \Pi_2(D)$.

Supposons donc $a \in \Pi_1(D)$ et $b \in \Pi_2(D)$; soit $m = D \cap [a,b]$, et posons $a' = \hat{\varphi}(a)$; $b' = \hat{\varphi}(b)$.

On a: $d(m,a) = d(m,a')$; $d(m,b) = d(m,b')$.

Donc $d(a',b') \leq d(a',m) + d(m,b') = d(a,m) + d(m,b) = d(a,b)$.

Autrement dit $d(a',b') \leq d(a,b)$.

Or, de facon analogue on a $d(a,b) \leq d(a',b')$,
d'où l'égalité cherchée $d(a,b) = d(a',b')$.

PERPENDICULAIRES ET PROJECTIONS.

<u>Definition</u>: On dit qu'une droite D' est perpendiculaire à D , et on écrit $D' \perp D$ lorsque $D' \neq D$ et que D' est identique à sa symétrique par rapport à D .

Le lemme 4 montrera que cette relation est symétrique. Il est immédiat que par tout point $m \notin D$ passe une perpendiculaire et une seule à D , à savoir la droite joignant m à son symétrique par rapport à D .

Lemme 3. 1) <u>Si $D' \perp D$, ces droites se coupent.</u>

2) <u>Soient D et D' deux droites qui se coupent en p . ($D' \perp D$) <==> (Tout point de D' se projette en p sur D) <==> (Il existe un point de D' distinct de p , qui se projette en p sur D) .</u>

Démonstration.

1) La droite D' contient au moins deux points distincts m_1 et m_2 symétriques par rapport à D, donc $[m_1, m_2]$ rencontre D.

2) Supposons $D' \perp D$ et $m \in D'$. Le symétrique m' de m par rapport à D est dans D' ; le point $D \cap [m, m']$, c'est-à-dire la projection de m sur D est donc bien le point p.

Inversement, soient D et D' se coupant en p ; soit m un point de D' distinct de p, et dont la projection sur D est p ; soit m' le symétrique de m par rapport à D ; le segment $[m, m']$ rencontre D en p. Donc la droite D' qui contient les points distincts m, p contient aussi m' ; d'où $D' \perp D$.

Corollaire. Soit $D' \perp D$ et soit f une isométrie de $D' \cup D$. On a $f(D') \perp f(D)$.

Cela résulte de ce que, grâce au lemme ci-dessus, la perpendicularité s'exprime en termes de distances.

Lemme 4. Si $D' \perp D$, on a aussi $D \perp D'$.

Démonstration.

Supposons $D' \perp D$ et soit p leur intersection. Soit $m \in D$; pour tout m' de D' distinct de p, on a $d(m, m') = d(m, m')$ où m'' désigne le symétrique de m' par rapport à D.

Donc m' ne peut être la projection de m sur D' (unicité du minimum); cette projection est donc p, d'où $D \perp D'$ d'après le lemme 3.

Lemme 5. Soit $D \perp D'$.
Alors $(D \perp D'') \iff (D' \parallel D'')$.

Démonstration.

1) Soit $D \perp D'$ et $D' \parallel D''$.

Les droites D, D'' se rencontrent en un point p . Les symétriques D' et D''_1 des parallèles D' et D'' par rapport à D sont parallèles (conséquence immédiate 2 des axiomes III); donc D'' et D''_1 sont parallèles et passent par p . D'où $D'' = D''_1$ et enfin $D \perp D''$.

2) Soit $D \perp D'$ et $D \perp D''$.

Soit m un point de D'' et hors de D . La parallèle à D' menée par m est perpendiculaire à D d'après ce qu'on vient de voir; elle est donc identique à D'' d'après l'unicité de la perpendiculaire à D menée par un point hors de D . Autrement dit $D' \parallel D''$.

Conséquence.

Soient δ_1, δ_2 deux directions; nous dirons qu'elles sont perpendiculaires s'il existe deux droites perpendiculaires de directions δ_1 et δ_2 . Les lemmes 4 et 5 montrent que

1) Cette relation est symétrique, antiréflexive (on n'a jamais $\delta \perp \delta$) et à toute direction correspond une direction perpendiculaire et une seule.

2) Pour que deux droites soient perpendiculaires, il faut et il suffit que leurs directions le soient.

Remarque: Il résulte de là que l'application qui à tout $m \in \Pi$ fait correspondre sa projection orthogonale sur une droite D n'est autre que la projection oblique sur D parallèlement à la direction perpendiculaire à D .

Définition: Soient a,b deux points distincts, de milieu O . On appelle médiatrice de (a,b) la perpendiculaire menée par O à la droite $D(a,b)$.

<u>Lemme 6.</u> <u>Soient a, b deux points distincts, et D leur médiatrice.</u>
<u>Soient Π_a, Π_b les demi-plans ouverts définis par D et contenant respectivement a et b.</u>

$$(m \in D) \Longrightarrow d(m,a) = d(m,b)$$

$$(m \in \Pi_a) \Longrightarrow (d(m,a) < d(m,b)) \; ; \; (m \in \Pi_b) \Longrightarrow (d(m,b) < d(m,a))$$

Comme a et b sont symétriques par rapport à D, $(m \in D) \Longrightarrow d(m,a) = d(m,b)$

Si $m \in \Pi_a$, soit $n = D \cap [m,b]$; comme $n \notin [a,m]$ (convexité de Π_a), on a

$$d(m,a) < d(m,n) + d(n,a) = d(m,n) + d(n,b) = d(m,b) .$$

On opère de même si $m \in \Pi_b$.

<u>Corollaire 1.</u> $(m \in D) \Longleftrightarrow (d(m,a) = d(m,b))$.

<u>Corollaire 2.</u> (comparaison des obliques)

Soit p la projection de m sur la droite qui porte a et b.

La relation d'ordre entre $d(p,a)$ et $d(p,b)$ est la même qu'entre $d(m,a)$ et $d(p,b)$.

En effet suivant que $d(p,a) - d(p,b)$ est nul, strictement négatif ou strictement positif, le point m appartient à D, Π_a ou Π_b.

On exprime encore ainsi ce résultat:

La longueur d'une oblique est une fonction strictement croissante de la longueur de sa projection.

Le théorème de PYTHAGORE précisera quantitativement ce résultat.

<u>Corollaire 3.</u> Soit $\{0, a, b\}$ un triangle avec $d(0,a) = d(0,b)$ et $a \neq b$. La projection de p sur la

droite portant a,b est le milieu de (a,b) .

C'est une conséquence immédiate mais très importante du corollaire 2; il s'exprime encore ainse:

Dans un triangle isocèle en 0 , la hauteur issue de 0 est <u>axe de symétrie</u> du triangle.

<u>SYMETRIE PAR RAPPORT A UN POINT ET PRODUIT DE SYMETRIES.</u>

<u>Definition</u>: On appelle <u>symétrie par rapport à un point 0</u> de π l'application f de π sur π définie par:

$f(0) = 0$ et $f(x) = x'$ pour $x \neq 0$, où x' est le point de la droite $D(0,x)$ tel que 0 soit milieu de (x,x') .

Il est immédiat que f^2 = identité et que $f(D) = D$ pour toute droite D contenant 0 .

<u>THEOREM 1.</u> <u>La symétrie par rapport à un point 0 est identique au produit des symétries par rapport à deux droites perpendiculaires arbitraires passant par 0 .</u>

<u>Démonstration</u>.

Soient D_1, D_2 deux droites perpendiculaires passant par 0 .

Soit $m \notin (D \cup D')$.

Soient Δ_1, Δ_2 les parallèles à D_1 et D_2 menées par m ; soit Δ_i' la symétrique de Δ_i par rapport à D_i $(i = 1,2)$.

Le rectangle formé par les deux couples de parallèles Δ_1, Δ_1' et Δ_2 , Δ_2' est symétrique par rapport aux droites D_1 et D_2 ; il en est donc de même de ses deux diagonales; celles-ci se coupent donc en un point situé sur D_1 et D_2 , donc en 0 , et elles se coupent en leur milieu. Donc le symétrique de m par rapport à 0 est le sommet de ce rectangle opposé à m , et on passe bien de m à ce point par le produit des symétries par rapport à D_1 puis D_2 .

Si $m \in D \cup D'$ le même résultat est immédiat.

Corollaire. La symétrie par rapport à un point est une isométrie. Elle transforme toute droite D en une droite parallèle.

(Considérer le cas où D passe par 0 , puis l'autre cas).

Application.

Appelons parallélogramme tout quadrilatère (a,b,a',b') tel que les deux couples diagonaux (a,a') et (b,b') aient même milieu.

Il résulte du corollaire précédent que, dire qu'un quadrilatère non aligné a,b,a',b' est un parallélogramme, équivaut à dire que ses sommets sont distincts deux à deux, et que

$$D(a,b) \parallel D(a',b') \quad \text{avec} \quad D(a,b') \parallel D(a',b)$$

D'autre part, tout parallélogramme a pour centre de symétrie le milieu commun des diagonales, donc deux côtés opposés d'un parallélogramme sont égaux.

Lemme 7. Soient $D, D', A,$ trois droites parallèles.

1) Si D' est la symétrique de D par rapport à A , toute sécante les rencontre en trois points $m,m',a,$ tels que a soit le milieu de (m,m') .

2) Inversement s'il existe une sécante qui a cette propriété, D' est la symétrique de D par rapport à A .

Démonstration.

1) Soient D, D' symétriques par rapport à A ; et soient $m, m', a,$ les points d'intersection avec une sécante. Soit B la perpendiculaire à A menée par a . Le produit des symétries par rapport à A , puis B , transforme D en D' ; donc d'après le théorème 1, ces droites sont symétriques

par rapport à a ; donc ce point est milieu de (m,m') .

2) Si a est milieu de (m,m'), D' est symétrique de D par rapport à a . Or D est symétrique par rapport à B . Donc d'après le théorème 1 et son corollaire, la symétrique de D par rapport à A est identique à sa symétrique par rapport à a , donc c'est D' .

THEOREME 2. (forme faible du théorème de THALES).
Si trois parallèles D, D', A sont coupées par une sécante en trois points m,m',a, tels que a soit milieu de (m,m') , il en est de même pour toute sécante (autrement dit D et D' sont alors symétriques par rapport à tout point de A).

C'est une conséquence immédiate du lemme 7.

Corollaire. Pour tout entier $n \geqslant 2$, tout intervalle peut être partagé (d'une facon et d'une seule) en n intervalles consécutifs égaux.

(Construction classique utilisant des parallèles passant par une suite de points équi-répartis sur une droite auxiliaire).

Nous allons pouvoir maintenant étudier la structure affine du plan.

6. STRUCTURE D'ESPACE VECTORIEL DU PLAN π MUNI D'UNE ORIGINE

Ce chapitre va utiliser maintenant uniquement les axiomes I, II, $III_{a,b,c}$ et la forme faible du tréorème de THALES (thécrème 3). Aussi pourra-t-il s'appliquer tel quel au développement d'une axiomatique basée sur I, II, $III_{a,b,c}$ et prenant pour axiome l'énoncé du théorème 3.

Lemme 8. Soit D une droite et φ la projection oblique sur D parallèlement à δ.
$(0$ milieu de $(a,b)) \Longrightarrow (\varphi(0)$ milieu de $(\varphi(a), \varphi(b))$.

C'est une conséquence immédiate du théorème 2.

Corollaire. Pour tout parallélogramme (a,b,a',b'), sa projection $(\varphi(a), \varphi(b), \varphi(a'), \varphi(b')$, est un parallélogramme (aplati).

Structure additive du plan π muni d'une origine.

Nous allons maintenant utiliser le fait que l'ensemble R des nombres réels est muni d'une structure de groupe additif. Chaque droite orientée est donc, dès qu'on y a choisi une origine 0, munie canoniquement d'une structure de groupe additif isomorphe à R. La relation (m est milieu de a,b) s'exprime alors par la relation $2m = a + b$; et le fait que $\{0, a, b, c\}$ est un parallélogramme aplati équivaut à $0 + b = a + c$ ou $b = a + c$.

Définition: Soit 0 un point de π ; on l'appellera par la suite origine de π. Dans le plan muni de cette origine, les points de π s'appellent maintenant vecteurs.

Pour tout couple (a,b) de points de π, on désigne par $(a \top b)$ le point de π tel que $(0, a, a \top b, b)$ soit un parallélogramme, c'est-à-dire le symétrique de 0 par rapport au milieu de (a,b).

THEOREME 3. Le plan Π muni de l'opération interne $\top$ est un groupe commutatif. Toute droite passant par 0 en est un sous-groupe, et Π est somme directe de deux droites distinctes quelconques passant par 0. Les autres droites de Π ne sont autres que les translatées des droites passant par 0.

Démonstration.

Soient D_1, D_2 deux droites distinctes passant par 0. A tout $m \in \Pi$, associons ses composantes, c'est-à-dire ses projections m_1, m_2 sur D_1, D_2 parallèlement à D_2, D_1.

Le corollaire du lemme 8 montre que $(a \top b)_i = a_i \top b_i$ l'addition ordinaire si l'on convient de prendre 0 comme origine sur ces droites.

Comme tout point de Π est caractérisé par ses deux composantes, on en déduit aisément que l'opération $\top$ munit Π d'une structure de groupe commutatif.

Il est immédiat que toute droite passant par 0 est sous-groupe de Π. D'autre part, tout m s'écrit d'une facon unique $m = m_1 \top m_2$; donc Π est bien somme directe de D_1 et D_2.

Enfin soit D une droite passant par 0, soit $a \in \Pi$. Si $a \in D$, il est immédiat que $D \top a = D$; sinon soit D' la parallèle à D passant par a. La direction δ de la droite contenant 0 et a est distincte de celle de D ; donc la projection φ de D dans D' parallèlement à δ est une application biunivoque de D sur D'. Pour tout $x \in D$ $(0, a, \varphi(x), x)$ est un parallélogramme; donc $\varphi(x) = x \top a$, c'est-à-dire que $D' = \varphi(D) = D \top a$.

Inversement, pout toute droite D' ne passant pas par 0, soit D la parallèle à D' menée par 0 ; pour tout $a \in D'$, on vient de voir que $D' = D \top a$.

Remarque: La démonstration précédente n'utilise nullement la structure d'ordre du plan, mais seulement la structure additive sur chaque droite. Aussi n'est-il pas ètonnant que le théorème 3 s'étende à tout "plan" satisfaisant à l'axiome I, et dont chaque droite soit munie d'une structure d'espace homogène associée à un groupe commutatif tel que $a + a \neq 0$ pour tout a, ces diverses structures étant liées par l'axiome III'_d (voir plus loin).

Si l'on veut aller plus loin, et étudier la structure affine de Π, nous devons utiliser le fait que R est un corps totalement ordonné archimédien. Rappelons en quoi consiste ce caractère archimédien:

Pour tout nombre $\alpha > 0$ il existe un nombre entier $n > \alpha$.

Nous allons utiliser cette propriété sous la forme suivante:

Lemme 9. Désignons par Q l'ensemble des rationnels ($Q \subset R$); soit a un nombre > 0 et soit φ l'application $x \longrightarrow ax$ de R sur R. Toute application croissante ψ de R dans R qui coïncide avec φ sur Q, n'est autre que φ.

Démonstration.

L'application ψ/a de R dans R est croissante et est l'identité sur Q. Soit $x \notin Q$; la croissance de ψ/a entraîne que tout rationnel est, ou bien à droite de x et $\psi(x)/_a$, ou bien à gauche de ces deux nombres; donc il n'y a aucun rationnel entre x et $\psi(x)/_a$. Ceci entraîne que $\psi(x)/_a = x$; sinon il existerait un entier $q > 0$ tel que $q|x - \psi(x)/_a| > 1$; il existerait alors évidemment un des nombres rationnels p/q entre x et $\psi(x)/_a$.

Multiplication par les scalaires.

Notre définition va reposer sur l'existence de la structure vectorielle de chaque droite munie d'une origine.

<u>Définition</u>: Dans Π muni d'une origine 0 , et pout tout nombre λ l'application $x \longrightarrow \lambda x$ est ainsi définie:

1) $\lambda 0 = 0$.

2) Pour $x \neq 0$, λx est le produit de x par λ dans l'espace vectoriel constitué par la droite $D(0,x)$ munie de l'origine 0 .

<u>Propiétés de la multiplication scalaire.</u>

1) $(\lambda + \mu)\, x = \lambda x \top \mu x$

2) $\lambda(\mu x) = (\lambda \mu)\, x$

3) $1.x = x$.

Ajoutons que $(-1)x = x'$, symétrique de x par rapport à 0 .

Ces propriétés résultent immédiatement de la structure vectorielle sur la droite $D(0,x)$.

Pour aller plus loin, nous aurons besoin d'un lemme, qui n'est autre que le théorème de THALES sous sa forme générale. Nous désignerons encore ici par m_1 et m_2 les composantes d'un point m sur deux sécantes D_1, D_2 passant par 0 .

<u>Lemme lo.</u> <u>Pour tout nombre λ et tout $x \in R$, on a</u>

$$(\lambda x)_1 = x_1 .$$

Démontrons d'abord cette relation pour λ rationnel: pour tout entier q , on a $(qu)_1 = q.u_1$ d'où $(\frac{1}{q}.v)_1 = \frac{1}{q}.v_1$; et enfin $(\frac{p}{q}.x)_1 = \frac{p}{q}.x_1$.

Considérons maintenant le cas général:

C'est évident si $x \in (D_1 \cup D_2)$; supposons donc $x \notin D_1 \cup D_2$ (c'est le cas envisagé dans la forme classique du théorème).

On a alors $x \neq 0$ et $x_1 \neq 0$; orientons les droites

$D(O,x) = D$ et $D(O,x_1) = D_1$ de facon que $O < x$ et $O < x_1$ respectivement.

L'application $\lambda \longrightarrow \lambda x$ de R dans D est croissante; l'application $m \longrightarrow m_1$ de D dans D_1 est croissante (conséquence 1 des axiomes I et II). Donc $\lambda \longrightarrow (\lambda x)_1$ est croissante; or l'application $\lambda \longrightarrow \lambda x_1$ est croissante et ces deux applications coincident pour tout λ rationnel; elles sont donc identiques d'après le lemme lo (dans lequel on peut identifier R à D_1).

Corollaire. On a l'identité

(4) $$\lambda(x \top y) = \lambda x \top \lambda y \qquad \text{pour tout } x,y \in \Pi .$$

En effet,

$$\lambda(x \top y) = (\lambda(x \top y))_1 + (\lambda(x \top y))_2 = (\lambda x_1 \top \lambda y_1) \top (\lambda x_2 \top \lambda y_2)$$
$$= \lambda(x_1 \top x_2) \top \lambda(y_1 \top y_2) = \lambda x \top \lambda y .$$

THEOREME 4. *Π muni d'une origine O, de l'addition $\top$ et de la multiplication par les scalaires réels, est un espace vectoriel de dimension 2, dont les sous-espaces affines de dimension 1 ne sont autres que les droites de Π.*

En effet, les droites D_1 et D_2 sont des sous-espaces vectoriels de dimension 1, et Π en est la somme directe. Tout le reste a été déjà démontré.

Désormais nous remplacerons la noterons $\top$ par la notation classique + .

Conséquences importantes de ce théorème.

Nous pouvons désormais utiliser les outils algébriques pour l'étude du plan. Enumérons brièvement quelques sujets d'étude où ils apportent une simplification considérable:

1) Les translations vont pouvoir s'étudier comme applications de la forme $x \longrightarrow x + a$. Il devient aveuglant qu'elles

constituent un groupe isomorphe au plan Π muni d'une origine.

Elles permettent de définir correctement la notion de droites orientées parallèles, donc aussi de direction orientée.

2) Les homothéties $x \longrightarrow \lambda x + a$ (où $\lambda \neq 0$) peuvent maintenant s'étudier par une méthode régulière, simple, élégante, qui remplacera une recherche hasardeuse et des raisonnements peu rigoureux. On voit apparaître la structure du groupe des homothéties, ses sous-groupes intéressants ($\lambda = 1$; $\lambda = \pm 1$; $a = 0$) ; on peut trouver aisément les points doubles d'une homothétie.

3) Définition et étude commode des barycentres; opérations sur les ensembles convexes.

4) Accès facile aux notions de forme linéaire, de fonction affine, de transformation linéaire du plan.

5) Notion d'aire orientée associée à un couple de vecteurs, et définition de l'orientation du plan.

Vecteurs libres et formule de CHASLES.

Supposons Π muni d'un origine. (Pour tous $x, y \in \Pi$, il existe une translation et une seule qui transforme x en y ; c'est la translation $\mathcal{T}_a$ où $a = (y - x)$; ceci justifie la définition suivante, indépendante du choix de l'origine:

On appelle vecteur libre d'extrémités x,y (et on note $\overrightarrow{xy}$) la translation de Π qui transforme x en y.

L'ensemble des vecteurs libres est muni d'une opération interne, notée additivement, qui n'est autre que la composition des translations; c'est un groupe isomorphe ou plan Π muni d'une origine.

La relation évidente suivante:

$$\overrightarrow{x_1 x_n} = \overrightarrow{x_1 x_2} + \overrightarrow{x_2 x_3} + \ldots + \overrightarrow{x_{n-1} x_n}$$

est dite formule de CHASLES.

La notion de vecteur libre a l'intérêt de permettre des calculs algébriques sans avoir à fixer d'origine dans Π .

7. DEFINITION ET PROPRIETES DU PRODUIT SCALAIRE.

Munissons Π d'une origine 0 . On appelle <u>produit scalaire</u> des vecteurs x et y le nombre réel $x.y$ ainsi défini:

1) $x.y = 0$ si l'un au moins des vecteurs x,y est nul.

2) si $x \neq 0$ et $y \neq 0$, soit y' la projection orthogonale de y sur la droite $D(0,x)$. On pose $x.y = \xi \times \eta'$, en désignant par ξ et η' les abscisses de x et y' sur la droite $D(0,x)$ munie de l'origine 0 et orientée de facon arbitraire (ce qui ne change évidemment rien au signe de ce produit).

<u>THEOREME 5.</u> <u>L'application $(x,y) \longrightarrow x.y$ de $\Pi \times \Pi$ dans R est bilinéaire et symétrique; elle est positive, en ce sens que $x.x > 0$ pour tout $x \neq 0$.</u>

<u>Démonstration.</u>

1) Pour tout x , l'application $y \longrightarrow x.y$ est linéaire c'est évident si $x = 0$; sinon la projection $y \longrightarrow y'$ de Π sur $D(0,x)$ étant linéaire, et l'application $y' \longrightarrow \xi \times \eta'$ de $D(0,x)$ dans R étant linéaire, il en est de même de leur composée $y \longrightarrow \xi \times \eta'$.

2) Montrons que $x.y = y.x$; c'est évident si l'un des facteurs est nul. Sinon, comme pour tout scalaire $k>0$, on a évidemment

$$kx.y = k(x.y) \quad \text{et} \quad x.ky = k(x.y) .$$

il suffit de démontrer cette égalité lorsque $d(0,x) = d(0,y) \neq 0$; dans ce cas, d'après le corollaire 3 du lemme 6, le triangle $\{0,\ x,\ y\}$ admet un axe de symétrie passant par 0 ; cette symétrie transforme la projection de y sur $D(0,x)$ en la projection de x sur $D(0,y)$, d'où l'égalité cherchée.

3) Cette symétrie entraîne que le produit $x.y$ est également linéaire en y .

4) Enfin la positivité est immédiate; plus précisemment on a pour tout x :

$$x.x = (d(0,x))^2$$

Angle et cosinus d'un angle.

Il est commode à ce stade, bien que non indispensable, d'introduire une notion très fruste d'angle (sans notion d'égalité, d'addition, ni à fortiori de mesure) et celle de cosinus d'un tel angle.

On appellera angle tout couple ordonné de demi-droites de même origine; son sommet est l'origine de ces demi-droites.

On définit ainsi le cosinus de l'angle (D_1,D_2) d'origine 0 :

Soit m le point de D_2 tel que $d(0,m) = 1$, et soit m' sa projection sur la droite Δ_1 portant D_1 ; on munit Δ_1 de l'origine 0 , et de l'orientation qui rend $D_1 \geqslant 0$.

On pose $\cos (D_1,D_2)$ = abscisse de m' sur Δ_1 .

Pour tout scalaire k , on sait que $(km)' = k.m'$; il en résulte que, si l'on note $\|x\|$ et $\|y\|$ les distances $d(0,x)$ et $d(0,y)$ on a:

$$x.y = \|x\| \times \|y\| \cos (D_1,D_2)$$

quels que soient x et y sur D_1 et D_2 respectivement.

On a évidemment $\cos (D_1,D_2) = \cos (D_2,D_1)$.

En oûtre comme la projection orthogonale diminue les distances, on a

$$|\cos (D_1,D_2)| \leqq 1 .$$

Calcul des distances.

Toute translation est une isométrie; en effet le quadrilatère $(x, y, y+a, x+a)$ étant un parallélogramme, le couple (x,y) est symétrique de couple $(y+a, x+a)$ par rapport à un point, d'où l'égalité

$$d(x,y) = d(x+a, y+a) .$$

En particulier $d(x,y) = d(0, y-x)$.

D'où $d^2(x,y) = (y-x)(y-x)$.

Ceci s'écrit encore $d^2(x,y) = x.x - 2x.y + y.y$, ce qui s'écrit avec les notations habituelles dans les triangles

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A} .$$

Le théorème de PYTHAGORE en est un cas particulier, lorsque les droites $D(0,x)$ et $D(0,y)$ sont perpendiculaires.

Nous ne développerons pas davantage les conséquences de la structure vectorielle et métrique que nous venons de mettre en évidence. Nous disposons maintenant des outils essentiels pour faire commodément ce développement.

8. AXIOMATIQUE A BASE AFFINE.

Dans l'axiomatique précédente, la structure affine du plan apparaît, comme conséquence de propriétés métriques, après un développement déjà substantiel; et de facon précise, au théorème 2 (forme faible du Théorème de THALES).

On peut désirer rester plus près du schéma idéal "espace vectoriel, produit scalaire". C'est dans ce but que nous proposons une seconde axiomatique. Le théorème 2, dont l'énoncé est simple et n'utilise que les notions de milieu et de parallèles, y sera pris comme axiome.

La perpendicularité sera, comme l'ordre, une notion primitive. Enfin les propriétes du produit scalaire résulteront de la symétrie du rapport de projection associé à tout couple de demi-droites.

Les premiers axiomes seront les axiomes I et II (le tronc commun). On garde les axiomes III_a, III_b, III_c, qui introduisent une distance sur chaque droite; mais on ne postule plus l'inégalite triangulaire. Par contre on introduit l'axiome fondamental suivant:

AXIOME III'_d. Pour tout triplet (A,B,C) de droites parallèles et pour tout couple de sécantes qui rencontrent ces parallèles en (a,b,c) , (a',b',c') respectivement,
[b milieu de (a,c)] ==> [b' milieu de (a',c')]

Le chapitre 6 nous a montré comment ces axiomes permettaient d'établir simplement la structure affine du plan ou encore, après choix d'une origine, sa structure d'espace vectoriel à deux dimensions sur R . Nous n'y reviendrons pas.

Nous savons, à ce stade, ce qu'est une projection oblique. La projection orthogonale sera définie grâce à la notion de perpendicularité:

<u>AXIOME IV'$_a$.</u> (des perpendiculaires).
<u>La perpendicularité (notée $\perp$) est une relation binaire symétrique sur l'ensemble des droites, telle que</u>

1) <u>$(A \perp B) \Longrightarrow (A$ et B ont des directions distinctes).</u>
2) <u>Pour toute droite A, il existe au moins une droite B telle que $A \perp B$.</u>
3) <u>Pour tout couple (A,B) tel que $A \perp B$, $(A \parallel A') \Longleftrightarrow (A' \perp B)$.</u>

La symétrie et la propriété 3 entraînent que la perpendicularité de deux droites ne dépend que de leurs directions; d'où une relation de perpendicularité sur l'ensemble des directions: c'est une relation symétrique, telle que pour toute direction δ, il en existe une et une seule δ' telle que $\delta \perp \delta'$; en oûtre on a alors $\delta \neq \delta'$.

On peut désormais parler de projection orthogonale sur une droite. Si D_1 et D_2 sont deux demi-droites de même origine, on peut donc définir le rapport de projection de D_2 sur D_1, noté $\cos(D_1,D_2)$.

<u>AXIOME IV'$_b$.</u> <u>Pour tout couple (D_1,D_2) de demi-droites de même origine, on a:</u>

$$\cos(D_1,D_2) = \cos(D_2,D_1) .$$

Une forme équivalente serait la suivante:

Pour tout triplet non-aligné (O, a, b) tel que $d(O,a) = d(O,b)$, si a' et b' désignent les projections orthogonales de a et b sur $D(O,b)$ et $D(O,a)$ respectivement, on a $\overline{Oa'} = \overline{Ob'}$ sur les droites $D(O,b)$ et $D(O,a)$ orientées de O vers b et vers a respectivement.

On peut dès lors définir le produit scalaire de deux vecteurs (dans le plan muni d'une origine); sa bilinéarité et sa symétrie sont immédiates et l'on a aussitôt la formule fondamentale:

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2a.b .$$

Il résulte classuquement de là que cos $(\Delta, \Delta') \leq 1$.

Mais on peut préférer une démonstration du théorème de PYTHAGORE qui suive davantage "la figure". En voici une, rapide et rigoureuse. Soient Δ , Δ' deux demi-droites d'origine ω ; soit $x \in \Delta$ et soit k le cosinus de (Δ, Δ') .

Soit x' la projection de x sur la droite portant Δ' ; et soit x'' la projection de x' sur la droite portant Δ ; on a évidemment $\overline{\omega x''} = k^2 \, \overline{\omega x}$, d'où $x'' \in \Delta$.

Si maintenant (A, B, C) est un triangle, rectangle en A , désignons par H la projection de A sur la droite $D(B, C)$, par a,b,c les longueurs des côtés, et par k,k' les cosinus des couples de demi-droites associées à B et C respectivement dans ce triangle.

Ce qui précede montre que $H \in [B, C]$, d'où $a = k^2 a + k'^2 a$ ou encore $a^2 = k^2 a^2 + k'^2 a^2$, ce qui s'écrit enfin $a^2 = b^2 + c^2$.

Il en résulte que $|k|$ et $|k'|$ sont ≤ 1 .

Notons que cette démonstration ne nécessite aucun théorème explicite préalable sur les triangles semblables ou sur la somme des angles d'un triangle, contrairement à une croyance assez rèpandue.

Pour achever la construction de plan euclidien, il nous reste à montrer que la distance donnée dans le plan est invariante par translation, ce qui permettra d'écrire la formule (après choix d'une origine):

$$d^2(x,y) = (x-y)^2 \; .$$

Or considérons un rectangle quelconque, de côtés successifs a, b, a', b' ; le théorème de PYTHAGORE donne:

$$a^2 + b^2 = a'^2 + b'^2 \quad ; \quad a^2 + b'^2 = a'^2 + b^2$$

d'où $a^2 = a'^2$ et $b^2 = b'^2$.

L'invariance des longueurs par translation en résulte aussitôt.

On peut désormais utiliser le produit scalaire pour le calcul des longueurs.

Exemples.

1) Dans tout parallélogramme, la somme des carrés des longueurs est égale à la somme des carrés des diagonales.

En effet $(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2)$.

2) Dire qu'un parallélogramme est un rectangle équivaut à dire que ses diagonales sont égales.

En effet $(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4\ ab$; et $(a.b = 0) \Longleftrightarrow (D(0,a) \perp D(0,b))$

Application. Lieu des points d'où l'on voit un segment sous un angle droit.

ADAPTATION DE CETTE AXIOMATIQUE
A L'ENSEIGNEMENT DE LA "PETITE GEOMETRIE".

Nous appelons "petite géométrie" celle qui n'utilise pas le théorème de THALES, mais seulement sa forme faible qui ne fait intervenir que des rapports rationnels.

Notre axiomatique s'adapte aisément à un tel enseignement très élémentaire. On peut dans ce but remplacer d'abord les énoncés $III_{a,b,c}$ par $III'_{a,b,c}$ qui suivent, et l'axiome IV'_b par IV''_b .

AXIOME III'. Dans l'ensemble $\Pi \times \Pi$ des couples de points est définie une relation d'équivalence, notée $\sim$ et telle que

a) Pour tous a,b on a $(a,b) \sim (b,a)$.

b) Pour toute droite D , et tous $a, b, a' \in D$, il existe à gauche et à droite de a' un b' unique tel que $(a,b) \sim (a',b')$.

c) <u>Pour toute droite D et tous $a, b, c, a', b', c' \in D$ tels que $a \leq b \leq c$ et $a' \leq b' \leq c'$, $[(a,b) \sim (a',b')$ et $(b,c) \sim (b',c')] \Longrightarrow [(a,c) \sim (a',c')]$</u>

L'axiome III'_d reste le même.

Nous avons déjà noté que le théorème 3 (structure additive de Π) pouvait s'établir en utilisant seulement la structure d'espace homogène de groupe commutatif définie sur les droites de Π ; donc les axiomes I, II, $III'_{a,b,c,d}$ permettent de l'établir, et même de montrer que Π muni d'une origine est un espace vectoriel sur Q (corps des rationnels). Ces résultats peuvent être établis avec un langage et une méthode élémentaires et ont déjà des conséquences très riches (translations, homothéties de rapports retionnels, barycentres dans des cas simples).

Notons que c'est pour simplifier que nous avons supposé la congruence définie dans $\Pi \times \Pi$; on pourrait supposer seulement qu'à chaque droite D est associée une congruence sur $D \times D$.

Pour étudier la structure métrique du plan nous proposons, pour la "petite géométrie", soit l'axiome de pliage IV, sout IV'_a et IV''_b , plus fort que IV'_b .

<u>AXIOME IV''_b.</u> <u>Soit (0, a, b) un triplet non-aligné et soit h la projection de 0 sur la droite D(a,b).</u>
<u>$[d(h,a) = d(h,b)] \Longleftrightarrow [d(0,a) = d(0,b)]$.</u>

En effet, à partir de là et des propriétés affines du plan, on étudie sans peine les symétries, déplacements, on démontre l'inégalité triangulaire, etc ... Seules, les propriétés métriques plus précises qui utilisent explicitement le théorème de PYTHAGORE ne peuvent être démontrées simplement puisqu'on ne dispose pas du théorème de THALES. *

---

*) Ce dermier est encore vrai, mais sa démonstration est artificielle et compliquée.

9. NOTION D'ANGLE.

Nous ne donnerons qu'une esquisse du développement de cette notion. Mettons d'abord en évidence les divers aspects de la notion d'angle, avant de faire le choix des définitions.

La définition la plus "grossière" est la suivante: Un angle est la portion de plan conprise entre deux demi-droites de même origine; on peut préciser ainsi cette définition: Un angle de sommet O est l'intersection de deux demi-plans fermés dont les droites frontières sont distinctes et passent par O .

Cette définition est bien adaptée au dessin, au découpage, à la mesure au moyen d'un rapporteur, en un mot à la géométrie "intuitive" jusqu'à l'âge de 12 ou 13 ans. Elle conduit à des difficultés dès qu'on veut ajouter plusieurs angles assez grands; on donne alors souvent des explications et des définitions confuses au moyen d'angles en spirale, qui obscurcissent la question et font considérer la notion d'angle comme un traquenard.

On évite la plupart de ces difficultés en "allégeant" l'angle; ce ne sera plus un secteur plan, mais un couple de deux demi-droites; le raccord entre cette définition et la première est le suivant:

A tout couple (non ordonné) (D_1,D_2) de demi-droites de même origine et non opposées, associons l'angle-secteur $s(D_1,D_2) = A_1 \cap A_2$, où A_i est le demi-plan fermé limité par D_i et contenant D_j $(i,j = 1,2 \;;\; i \neq j)$. L'application s est la correspondance biunivoque cherchée.

Ayant choisi cette définition allégée, on est amené, devant l'impossibilité d'additionner deux couples de demi-droites à définir une relation d'équivalence dans l'ensemble des couples de demi-droites; puis à définir une addition sur l'ensemble des classes d'équivalence ainsi définies.

Or on montre ensuite, si l'on a défini correctement les rotations autour d'un point O, qu'à toute rotation est associée l'une de ces classes d'équivalence. Il se produit le même phénomène que pour la notion d'équipollence de vecteurs liés du plan; a chaque classe d'équivalence de tels vecteurs était associée canoniquement une translation du plan.

Dès lors nous apercevons une possibilité de définir plus élégamment la notion d'angle au moyen des rotations: Un angle ne sera plus, ni un secteur plan, ni un couple de demi-droites de même origine, ni même une classe d'équivalence de tels couples, mais une rotation autour d'une origine O (on montre ensuite que le choix de O n'importe pas). Puis on associera à tout couple ordonné de demi-droites d'origine O une rotation qui sera appelée l'angle de ce couple ordonné.

Schéma de la présentation.

Nous savons déjà que toute isomètrie de Π dans Π transforme les droites en droites, et conserve le parallèlisme et la perpendicularité. Nous allons étudier les isomètries qui laissent invariant un point O ; pour abréger nous appellerons demi-droite toute demi-droite d'origine O , et symétrie toute symétrie par rapport à une droite passant par O ; quand il n'y aura pas de confusion possible, nous noterons par la même lettre une demi-droite, la droite qui la porte, et la symétrie par rapport à cette droite. Enfin nous appellerons rotation le produit de deux symétries.

Lemme 13. Une isomètrie qui laisse invariante une demi-droite D est l'identité ou la symétrie D .

En effet cette isomètrie conserve chacune des demi-droites perpendiculaires à D ou les èchange (et une isomètrie qui conserve deux demi-droites non colinèaires est évidemment l'identité).

Lemme 14. Pour tout couple D, D' de demi-droites, il existe seulement deux isomètries qui transforment D en D' : La symétrie Δ (axe de symétrie de D, D') et la rotation $\Delta . D$.

C'est une conséquence immédiate de lemme 13.

Corollaire. Toute isomètrie qui laisse O invariant est une symètrie ou une rotation.

Lemme 15. Aucune rotation n'est une symètrie.

En effet, supposons que $r,s = t$; soit D une demi-droite telle que $t(D) = D$; on a $r(D) = s(D)$ puisque $s = rt$; donc $r = s$, d'où t = identité, ce qui est faux.

Corollaire des lemmes 14 et 15. Pour tout couple D,D' de demi-droites, il existe une rotation et une seule qui transforme D en D' .

Lemme 16. Pour toutes symétries $r, s, t,$ il existe une symétrie u telle que $r.s = u.t$.

En effet, soit D une demi-droite telle que $t(D) = D$, et posons $D' = r.s(D)$. Soit u l'axe de D,D' .

Les rotations $r.a$ et $u.t$ transforment D en D' , donc sont identiques.

On démontrerait de meme qu'il existe v telle que $r.s = t.v$.

Corollaire. Tout produit d'un nombre pair (resp. impair) symétries est une rotation (resp. une symétrie).

En effet, tout $r.s.t$ s'écrit $r.(r.u) = u$, d'où la propriété, par récurrence.

THEOREME 7. Les rotations constituent un groupe commutatif.

Seule reste à démontrer la commutativité:

Soit deux rotations $r.s$ et $t.u$; on peut écrire $t.u = s.v$
On doit vérifier que:

$rs.sv = sv.rs$ ou $r.v = svrs$, ou $(svr)^2 = I$,

ce qui est exact puisque $s.v.r$ est une symétrie.

Angle d'un couple ordonné de demi-droites.

Le corollaire des lemmes 14 et 15 justifie la définition suivante:

Définition: On appelle angle du couple (D_1,D_2) de demi-droites d'origine 0, la rotation qui transforme D_1 en D_2 ; on le note $\widehat{D_1\, D_2}$.

L'ensemble des angles n'est donc autre chose que l'ensemble des rotations; quand on utilise le langage des angles, on note additivement l'opération interne définie par la composition des rotations.

Formule de CHASLES. La relation évidente:

$$\widehat{D_1\, D_n} = \widehat{D_1\, D_2} + \widehat{D_2\, D_3} + \dots + \widehat{D_{n-1}\, D_n}$$

s'appelle formule de CHASLES.

En particulier on a toujours $\widehat{D_1\, D_2} + \widehat{D_2\, D_1} = 0$.

THEOREME. Soient D_1, D_2 deux demi-droites d'origine 0 ; soit T une rotation autour de 0 ; posons $D_i' = T(D_i)\,(i = 1,2)$. Alors $\widehat{D_1'\, D_2'} = \widehat{D_1\, D_2}$.

En effet $\widehat{D_1\, D_2} = \widehat{D_1\, D_1'} + \widehat{D_1'\, D_2'} + \widehat{D_2'\, D_2}$.

Or $\widehat{D_1\, D_1'} = \widehat{D_2\, D_2'} = -\widehat{D_2'\, D_2}$, d'où la relation cherchée.

Angle de deux demi-droites quelconques.

Soient Δ_1, Δ_2 deux demi-droites quelconques de Π, d'origines distinctes ou non; soient D_1, D_2 les demi-droites d'origine 0 qui s'en déduisent par translation.

Par définition l'angle de Δ_1, Δ_2 est l'angle $\widehat{D_1\, D_2}$.

Changement d'origine.

Soient 0_1 et $0_2 \in \Pi$, et soit Δ_1 une droite passant par 0_1.

La transposée de la symétrie par rapport à Δ_1 par la translation (O_1O_2) est la symétrie par rapport à $\Delta_2 = \Delta_1 + \overrightarrow{O_1O_2}$, parallèle à Δ_1 menée par O_2. D'où un isomorphisme canonique $I(O_1, O_2)$ du groupe $\mathcal{R}(O_1)$ des rotations autour de O_1 sur le groupe $\mathcal{R}(O_2)$ des rotations autour de O_2 (avec une transitivité évidente). Cet isomorphisme permet d'identifier les angles associés au point O_1 et ceux associés au point O_2.

Schéma d'une autre définition des angles.

On peut considérer que l'introduction des angles à partir des rotations, telle qu'elle est proposée ci-dessus, est mal adaptée à un enseignement élémentaire parce qu'elle s'appuie beaucoup sur la notion de transformation.

Nous en proposons donc une autre, qui garde un contact constant avec les souples de demi-droites. Elle ressemble fort à l'introduction des vecteurs à partir des vecteurs liés; la ressemblance est même si grande qu'on peut fondre les deux présentations dens un même schéma; c'est ce dernier que nous nous contenterons de donner ici, laissant au lecteur le plaisir de faire la traduction, soit en termes de vecteurs, soit en termes d'angles.

Schéma abstrait.

Soit E un ensemble muni d'un ensemble $\mathcal{S}$ de permutations (de E) telles que

1) σ^2 = identité pour tout $\sigma \in \mathcal{S}$.

2) Pour tous x, y de E, il existe une σ unique de $\mathcal{S}$ qui échange x et y.

3) Si on appelle translation tout produit $\rho\,\sigma$ (ρ et $\sigma \in \mathcal{S}$) on suppose que deux translations qui coincident pour un $x \in E$ sont identiques.

Lemme 17. Tout produit $\rho.\sigma.\tau$ d'éléments de $\mathcal{S}$ est élément de $\mathcal{S}$.

En effet, soit $a \in E$ et posons $a' = \rho.\sigma.\tau(a)$; soit π l'élément de Δ qui échange a et a' .

L'égalité $\rho.\sigma.\tau(a) = \pi(a)$ entraîne $\sigma,\tau(a) = \rho.\pi(a)$ d'où $\sigma.\tau = \rho.\pi$ d'où $\rho.\sigma.\tau = \pi$.

<u>Corollaire[1].</u> Pour tous $\rho, \sigma, \tau \in \Delta$, on a $(\rho\sigma\tau)^2 =$ identité.

On va introduire une relation d'équivalence dans $E \times E$; on dira que (a, b, c, d) est un <u>parallélogramme</u> de E si la permutation σ qui échange a,c est la même que celle qui échange b,d .

On dit alors que $(a,b) \sim (a',b')$ si (a,b,b',a') est un parallélogramme.

Il est immédiat que $[(a,b) \sim (a',b')] \iff [(a,a') \sim (b,b')]$
Cette relation est une relation d'équivalence: Réflexivité et symétrie sont immédiates; montrons la transivité:

Supposons $(a,b) \sim (a',b')$ et $(a',b') \sim (a'',b'')$. C'est dire que $a' = \rho(b)$, $b' = \rho(a)$ avec $a'' = \sigma(b')$, $b'' = \sigma(a')$.

On peut poser $b'' = \tau(a)$ ce qui revient à $a = \tau(b'')$.

On a donc $a'' = \sigma.\rho.\tau.\sigma.\rho(b)$, ce qui n'est autre que $\tau(b)$ d'après le corollaire ci-dessus; les relations $b'' = \tau(a)$ et $a'' = \tau(b)$ expriment que $(a,b \sim (a'',b'')$.

<u>Lemme 18.</u> <u>Pour tous a, b, c, a', b', c', on a:</u>
<u>$[(a,b) \sim (a',b')$ et $(b,c) \sim (b',c')] \implies$</u>
<u>$[(a,c) \quad (a',c')]$.</u>

En effet ces relations équivalent respectivement à

$(a,a') \sim (b,b')$; $(b,b') \sim (c,c')$; $(a,a') \sim (c',c')$

d'où la propriété par transitivité.

---

(1) Cet énoncé est d'ailleurs équivalent, malgré son apparence plus faible, à la propriété 3 des translations.

<u>Lemme 19.</u> <u>Pour tous a, b, a' il existe un b' unique tel que $(a,b) \sim (a',b')$.</u>

Car $b' = \rho(a)$ où ρ est l'élément de $\mathcal{S}$ tel que $a' = \rho(b)$.

On a désormais tous les éléments pour définir une structure de groupe sur le qoutient de $E \times E$ par cette relation d'équivalence. Sa commutativité résulte de ce que, dans un parallélogramme, deux couples opposés quelconques sont équivalents.

On montre que ce groupe est isomorphe au groupe des translations, et que celui-ci est identique au groupe des permutations de E qui transforment tout (a,b) en un couple équivalent.

Enfin on montre que pour tout point O de E, E est muni d'une structure de groupe commutatif d'élément neutre O, dont le groupe des translations n'est autre que le groupe précédemment défini.

Les éléments de $\mathcal{S}$ ne sont autre que les symétries $x \to (a-x)$ de ce groupe. Inversement, il est bien évident que pour tout groupe commutatif G, les symétries $x \to (a-x)$ de G ont les propriétés 1, 2, 3 exigées d'un ensemble $\mathcal{S}$, et que le groupe des translations associées à ce $\mathcal{S}$ n'est autre que le groupe des translations de G.

<u>Angle de deux droites.</u>

Soit (Δ_1, Δ_2) un couple ordonné de deux droites passant par O. On appelle angle de ce couple chacune des rotations qui amènent Δ_1 sur Δ_2.

Il est immédiat qu'il y en a deux: Ce sont les angles d'une demi-droite arbitraire de Δ_1 avec chacune des demi-droites de Δ_2.

On ne doit donc pas parler de <u>l'angle</u> de deux droites, mais des angles, de ces droites.

Cette situation peut être éclairée par la généralisation suivante: Soit A_1 une réunion de demi-droites d'origine 0, invariante par un sous-groupe G de $\mathcal{R}(0)$; soit $\varrho \in \mathcal{R}(0)$ et posons $A_2 = \varrho(A_1)$; toutes les rotations de $G \circ \varrho$ amènent A_1 sur A_2, d'où une multiplicité d'angles de A_1 et A_2 ; si l'on désirait absolument associer un pseudo-angle unique au couple (A_1, A_2), ce serait un élément du groupe quotient $\mathcal{R}(0)/G$.

Concrétisation des angles.

Soit $0 \in \Pi$ et soit D_0 une demi-droite d'origine 0. L'application $T \rightarrow T(D_0)$ est biunivoque de $\mathcal{R}(0)$ sur l'ensemble des demi-droites d'origine 0 ; d'où une identification commode de $\mathcal{R}(0)$ avec l'ensemble de ces demi-droites.

D'autre part la trace d'une telle demi-droite sur le cercle C_a de centre 0 et de rayon $a > 0$ caractérise cette demi-droite; d'où une seconde représentation: Les angles sont représentés par les points du cercle C_a muni du point origine $\omega = D_0 \cap C_a$; on sait qu'il est parfois commode de prendre $a = 1$.

C'est ce cercle qui va conduire à la notion de mesure des angles.

Mesure des angles.

Dégageons d'abord les caractères essentiels de la mesure des grandeurs telles que aires, volumes: Soit E un ensemble et soit A un ensemble de parties de E ; on suppose que si $X_1, X_2 \in A$, on a aussi $X_1 \cup X_2 \in A$. Une mesure sur A est une application $X \rightarrow f(X)$ de A dans R^+ telle que: $f(X_1 \cup X_2) = f(X_1) + f(X_2)$ pour tous X_1, X_2 disjoints ou "presque-disjoints" en un sens qu'on précise aisément dans chaque cas.

Donc d'une part A est un ensemble de parties de E, stable par réunion; d'autre part f est une fonction.

Rien de cela n'existe dans le cas des angles: D'une part la somme de deux angles ne s'interprête pas comme réunion d'ensembles, d'autre part l'expérience élémentaire montre qu'on ne peut pas espérer une mesure uniforme qui soit un nombre. Il va falloir procéder en sens inverse et prendre pour mesure une application convenable de R dans l'ensemble des angles.

Ce ne sera pas autre chose qu'une mise en forme mathématique de l'opération concrète d'enroulement d'un fil (représentant R) autour du cercle C_a de telle sorte que l'origine de R vienne s'appliquer sur l'origine ω de C_a.

<u>Définition</u>: On appelle <u>mesure des angles</u> toute application de R sur le groupe additif des angles telle que

$$\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y) \quad \text{pour tous } x, y \in R .$$

Pour éliminer les φ singulières, on doit ajouter que φ est continue, ce qui revient à dire que $\varphi(x)$ est petit quand x est petit. On montre que φ est périodique; soit α sa période. Lorsque $\alpha = 2\pi$, on dit que la mesure est faite en <u>radians</u>.

Pour tout angle θ, on appelle mesure de θ, tout élément de $\varphi^{-1}(\theta)$; il sont de la forme $x + n\alpha$ (n entier quelconque).

On peut encore énoncer ceci en disant que le groupe des angles est isomorphe au groupe quotient $R/\alpha Z$, c'est-à-dire au groupe des nombres réels modulo α.

10. AXIOMATIQUE DE L'ESPACE A TROIS DIMENSIONS.

Il y a peu de chose à ajouter aux axiomes du plan pour obtenir l'axiomatique de l'espace:

a) Par trois points il passe au moins un plan.

b) Tout plan qui contient deux points distincts d'une droite la contient en entier.

c) Pour tout plan P il existe une partition du complémentaire de P en deux parties non vides E_1, E_2 telles que tout intervalle qui a ses extrémités dans E_1 et E_2 respectivement rencontre P.

Mais ces énoncés ne sont vraiment clairs que s'ils sont intégrés à l'ensemble des autres axiomes. Aussi allons-nous énoncer explicitement l'ensemble des axiomes de l'espace. Pour éviter des redites, nous ne ferons cette explicitation que pour l'axiomatique à base affine.

L'espace est un ensemble E muni d'une structure par la donnée d'un ensemble $\mathcal{D}$ de parties de E, appelées <u>droites</u>, et d'un ensemble $\mathcal{P}$ de parties de E, appelées <u>plans</u>; ces droites et plans étant eux-mêmes munis de structures que précisent les axiomes.

On supposera que E contient au moins deux plans, que tout plan contient au moins deux droites, et que toute droite contient au moins deux points.

<u>Définition</u>: On dit que deux droites D_1, D_2 sont parallèles $(D_1 \parallel D_2)$ si, ou bien $(D_1 = D_2)$, ou bien $(D_1 \cap D_2 = \emptyset$ et D_1, D_2 sont contenues dans un même plan).

I. AXIOMES D'INCIDENCE.

a) Par deux points distincts quelconques de E passe une droite et une seule.

b) Pour tout $a \in E$ et pour toute droite D, il passe par a une parallèle et une seule à D.

c) Tout plan qui contient deux points distincts d'une droite la contient en entier.

d) Pour tout triplet (a, b, c) de points de E, il existe au moins un plan contenant a, b, c.

II. AXIOMES D'ORDRE.

a) A chaque droite D sont associées deux structures d'ordre total sur D, opposées l'une de l'autre.

b) Pour tout couple (D_1, D_2) de parallèles distinctes, et pour tous points a_1, a_2, b_1, b_2 tels que $a_i, b_i \in D_i$ $(i = 1,2)$, toute parallèle à ces droites qui rencontre $[a_1 a_2]$ rencontre aussi $[b_1 b_2]$.

c) Pour tout plan P, il existe une partition du complémentaire de P en deux parties non vides telles que

$$(a_1 \in E_1,\ a_2 \in E_2) \implies (P \cap [a_1 a_2] \text{ non vide}).$$

III. AXIOME DE LA STRUCTURE ADDITIVE.

A l'ensemble E est associée une application d de $\Pi \times \Pi$ dans R, appelée distance et telle que:

a) $d(y,x) = d(x,y)$ pour tous x,y.

b) Pour toute droite D, tout $a \in D$, et tout nombre

$\ell > 0$, il existe dans D, de chaque côté de a, un point b unique tel que $d(a, b) = \ell$.

c) $(x \in a,b) \Longrightarrow (d(a,x) + d(x,b) = d(a,b))$.

d) Pour tout triplet A, B, C de droites parallèles contenues dans un même plan, et pour tout couple de sécantes les rencontrant respectivement en a, b, c et a', b', c',

(b milieu de (a,c)) ===> (b' milieu de (a', c')).

IV. AXIOME DES PERPENDICULAIRES ET DE LA SYMETRIE.

a) Pour tout plan P, il existe sur l'ensemble des droites de P une relation binaire symétrique notée $\perp$ et telle que
   1) $(A \perp B) \Longrightarrow$ (A et B ne sont pas parallèles).
   2) Pour toute droite A de P il existe une droite B de P telle que $A \perp B$.
   3) Pour tout couple (A,B) de droites telles que $A \perp B$,

$$(A' \parallel A) \Longleftrightarrow A' \perp B .$$

b) Pour tout triplet non-aligné (O, a, b) où $d(O,a) = d(O,b)$, si a' et b' désignent les projections de a,b sur D(O,a), D(O,b) respectivement, les mesures algébriques de $\overline{Oa'}$ et $\overline{Ob'}$ sur les droites orientées D(O,a), D(O,a) sont égales.

Dans ce dernier énoncé on définit ainsi la projection x' de x sur D : x' = x si $x \in D$; et si $x \notin D$, x' est l'intersection de D et de la perpendiculaire à D passant par x (elle est unique d'après IV_a).

BIBLIOGRAPHIE

-oOo-

On n'a indiqué ici que des travaux présentant un intérêt direct pour l'enseignement.

I. Travaux d'EUCLIDE ou inspirés par ceux d'EUCLIDE.

1. EUCLIDE: Traduction francaise de PEYRARD, chez LOUIS, Paris 184o.
   Traduction italienne par ENRIQUES, chez ZANICHELLI, Bologne 1932.
   Traduction anglaise par HEATH, Everyman's Library, New York 1956.

2. HILBERT: Grundlagen der Geometrie, Leipzig 193o.

3. G.B.HALSTED: Géométrie retionnelle, chez GAUTHIER-VILLARS, Paris 1911.

II. Travaux américains basés sur la notion de distance.

4. OSWALD VEBLEN: A system of axioms for geometry, Trans, Amer. Math. Soc., Vol. 5, 19o4, p. 343-384.
   The fundations of geometry, ch. I in Monographs on topics of modern mathematics, New York 1955

5. R.L.MOORE: Sets of metrical hypothesis for geometry, Trans. Amer. Math. Soc., Vol. 9, 19o8, p.487-512.

6. H.G.FORDER: The foundations of Euclidian Geometry, London 1927.

7. G.D.BIRKHOFF: A set of postulates for plane geometry based on scale and protractor, Ann. of Math., Vol. 33, 1932.

8. G.D.BIRKHOFF
and Ralph BEATHY: Basic geometry, New York 1941, and Manual to basic geometry.

9. B.E.GILLAM: A new set of postulates for Euclidian geometry, Revista de Ciencia, Vol. 42, 194o, p. 869-899.

10. L.M.BLUMENTHAL: Theory and application of distance geometry, New York, 1953.

11. SAUNDERS MAC LANE: Metric Postulates for plane geometry, American Math. Monthly, Vol. 66, 1959.

12. Travaux du "School Mathematics Study Group". (MOISE, CURTIS, DANS, WALKER). Manuel actuellement expérimenté sur une large échelle, et basé sur les idées de BIRKHOFF.

III. Travaux francais récents.

13. R.BRISAC: Exposé élémentaire des principes de la géométrie euclidienne, chez GAUTHIER-VILLARS, 1955 (exposé basé sur le groupe des déplacements).

14. G.CHOQUET: Sur l'enseignement de la géométrie élémentaire, dans "L'Enseignement des Mathématiques", chez DELACHAUX et NIESTLE, Paris. (exposé basé sur la distance et les pliages autour d'une droite).

15. A.Revuz: Exposé détaillé du travail précédent (multigraphié).

16. H.Cartan: Cours polycopié de Math. II. (axiomatique d'une partie de la géométrie plane).

IV. Manuels d'enseignement de la géométrie élémentaire contenant des idées intéressantes.

17. BREARD: Mathématiques II, les Editions de l'Ecole, Paris 1959 (algèbre et géométrie pour élèves de 15 ans).

18. DELTHEIL et CAIRE: Géométrie, chez BAILLIERE, Paris.

19. F.ENRIQUES et U.AMALDI: Elementi di Geometria ad uso delle scuola secondarie superiori, ZANICHELLI, Bologne.

20. C.ROSATI et P.BENEDETTI: Geometria, chez DANTE ALIGHIERI, Rome.

21. F.SEVERI: Geometria elementare, VALLECCHI, Florence.

22. E.CASTELNUOVO: Geometria intuitiva, La Nuova Italia, Florence.

23. E.KENNISTON and JULLY: Plane Geometry, Ginn and Co, 1946.

24. E.MOISE: Mathematics for High Schools, Geometry, Sale University, New Haven, Connecticut, 1959.

25. D.I.PEREPELKIN: Cours de géométrie élémentaire, GOSTEKHIZDUT 1949.

INDEX TERMINOLOGIQUE.

TABLE des MATIERES

DISCUSSION FOLLOWING PROFESSOR CHOQUET'S LECTURE.

Choquet. This presentation of geometry is intended for teaching in a school class. It should be taught slowly with many examples and exercises. I don't think that one should teach geometry as a subject separated from other mathematical subjects. It ought to be taught together with algebra, analytic geometry and trigonometry; and then it would take about two years with four hours a week. I presuppose that the pupils are familiar with the real numbers and the elementary geometry, such that through the course they should learn to formulate their intuitive knowledge in mathematical terms.

Straszewicz. I regard Choquet's treatment of geometry as suitable for application in schools. I think it can be presented to the pupils in a sufficiently easy manner. The main problem is that the teachers themselves should first learn it.

Freudenthal. This isn't the only problem. We cannot teach the pupils everything. There are certain psychological and pedagogical principles which mustn't be violated. For example order relations are easy to adult mathematicians, but very difficult for young pupils. For this reason the axioms II are too difficult. It would be better to introduce orderings by definitions than by axioms.

We must know why we want the pupils to learn axioms. Is the purpose to give an example of a logical structure? Then geometry isn't the best subject; a simpler structure would be better. I prefer the idea of axiomatization as the process by which one organizes a mathematical field. Here it isn't necessary to give all details in all proofs. Perhaps it would be a good idea to give examples of the two viewpoints.

Dieudonné. The important thing is to teach the students some good mathematics. The psychological considerations are of secondary importance. (La psychologie, je m'en fiche).

Choquet. The pupils know the geometrical concepts at the age of 15. We teach them axiomatics in order to improve their mathematical taste.

Bunt. It is my experience that teaching the full proofs of geometrical theorems on the basis of Hilbert's axioms, or a comparable system, is extremely time consuming. There is also a danger that the students will not see the wood because of the many trees. Therefore, though I am strongly in favour of teaching a good foundation of geometry and of showing the importance of an axiomatic system, I would like to teach the implications of a small number of axioms, leading to a limited geometrical system. A text along these lines, prepared by a working group of our institute, is being tried out in the highest grade of a number of Dutch gymnasia. The students have already gone through a full course of Euclidean plane geometry. Now they are explained the characteristics of a logical conclusion, stressing the importance of the structure of a statement. Several examples are used to show that the Euclidean system is not purely deductive. The difficulties, involved in setting up a system which meets modern requirements, are shown by developing the consequences of the following three axioms:

1. Through any two points passes one and only one line.

2. There exist three points through which there does not pass one line.

3. If line l does not pass through point P, then there exists one and only one line through P, parallel to l.

"Point" and "line" are undefined notions, "passes through" is an undefined relation. All other notions and relations have to be defined. The existence of six lines and four points is proved. It can easily be shown that a line not necessarily contains three points. To make this a provable theorem a fourth axiom is introduced.

It seems to me that a real understanding of such a limited mathematical theory is nearly as useful as studying a complete foundation of the usual plane geometry course. However, the difficulties involved in teaching even such a limited system should not be underestimated.

An ideal geometry course would be one which started more or less intuitively by using notions which, right from the start, are aimed at a good understanding of the axiomatic system which in the final part of the course will be taught. Choquet's system of axioms seems to promise good possibilities in this respect. However, it has to be worked out in details before its merits can be evaluated.

ON THE RELATION BETWEEN SYNTHETIC AND ANALYTIC GEOMETRY IN SECONDARY SCHOOLS

by W. Fenchel

The considerations concerning the teaching of geometry on the secondary level of which I am going to give a brief account are influenced by the situation to be faced at the so-called mathematics line of the Danish secondary schools after the introduction of a new curriculum in mathematics. As similar problems may turn up, or have done so, in other countries, it seems justified to talk about them on this occasion.

In the Danish school system there is, for pupils aiming at higher education, a discontinuity after the 9th grade, i.e. at the age of about 16. These pupils acquire their primary and in general also their intermediate education at municipal schools and have to change to a "Gymnasium" at that age, where they study for three years. We shall only be concerned with the curriculum in mathematics for these three years, i.e. for the age of about 16 to 19. I have also to mention that there are planned altogether three variants of the mathematics line, in two of which the curriculum in mathematics is somewhat reduced in favour of biology and the social sciences, respectively, and this reduction affects mainly geometry. Therefore the following considerations do not apply to these variants.

Differential and integral calculus will continue to play a prominent part in the curriculum in question. There are even some additions, in particular Taylor's formula. Other new topics are the elements of set theory and of (modern) algebra. Of course, these additions had to be compensated by reductions in other fields, willy-nilly mainly in geometry. Thus constructions with ruler and compasses have disappeared completely, and of the formerly rather comprehensive treatment of trigonometry and the conics only basis material is left. What remains is mainly analytic geometry in 2 and, to a certain extent, in 3 dimensions with special emphasis on vector algebra including the scalar product and on the study of mappings: isometries, similarities, examples of affinities.

A rigorous treatment of all the topics mentioned is aimed at. There is no difficulty with algebra, and the calculus can be based on one or the other continuity axiom for the real numbers. On the other hand, geometry presents serious problems in this respect. An axiomatic treatment in the traditional sense is completely out of the question for several obvious reasons. Experience shows that long sequences of intuitively clear and familiar propositions with almost trivial proofs, apt to occur in systems based on few simple axioms, are not easily grasped by young people. They find it diffucult to keep the propositions in the right order and to avoid the use of facts not yet proved, but well known to them. Considering that the pupils entering the gymnasium have a rather comprehensive knowledge of plane Euclidean geometry and are familiar with geometrical reasoning, though of course not on an axiomatic basis, one would wish to avoid tedious repetitions as far as possible. Looking for a suitable approach to the basic notions and results, we have also to take other circumstances into account. For the sake of physics it is imperative to start with the calculus at an early stage, and this has to be preceded not only by a discussion of the number system and of some algebraic notions, but also by an introduction to analytic geometry. There is thus not much time left for building up geometry systematically. Other side-conditions, which I shall shall not discuss here, are due to the requirement that the topics dealt with in the first year of the three years course in question shall also fit into the (common) curriculum for the two variants mentioned above.

To meet all these requirements, some admittedly peculiar to the Danish schools, will not be easy. Some compromises will certainly have to be made. I am not going to present a detailed, worked out proposal for a course in geometry, but merely a guide for teachers, a flexible scheme which would leave some freedom in the arrangement and in the choice of the statements which serve as axioms. It consists in a collection of intuitively acceptable geometrical statements (listed in the appendix to this article) from which there is a comparatively short way to the notions and results that form the principal subject of the course. No attempt is made to minimize the number of these statements, in particular no attention is paid to their mutual dependence. Their number is inconveniently large, it is true, but in part this is merely due to the formulation. For the present brief account it seemed expedient to avoid intermediate definitions and propositions. Therefore, everything has been expressed in terms of relations between pairs, triples etc. of points. This leads to circumstantiallities here and there, which obviously can be avoided by introducing appropriate notions. Needless to say that I do not propose that things should be presented to the pupils in the form chosen here.

There is also another, more essential aspect which has caused an increase in the number of axioms: space has been included, and the analogy between the line, the plane, and the space has been put forward as far as possible. Thus, space analogoues of plane axioms have been included, even if they are simple consequences of others.

The "axioms" are grouped in six sections under the headings: A. Collinearity and Coplanarity, B. Parallelity, C. Orthogonality, D. Orientation, E. Vectors, F. Congruence. If each section is taken as the basis for a separate chapter, the disadvantage of the large number of axioms should not be too serious. Almost all of them have to be stated in any case, if not as axioms, then as propositions.

The statements under "Collinearity and Coplanarity" are essentially the usual axioms of incidence. It will probably be advantageous to take them together with those under "Parallelity", which are redundant. It seems to me important to include space right from the beginning. Some introduction to the basic facts about the mutual positions of lines and planes in space is indispensible anyhow, and giving it at once, one can avoid that the pupils find the start a dull repetition of well-known trivialities. There is also a choice of problems non-trivial on the level in question; in particular one can let the pupils prove dependencies between the axioms and hereby try to provide an interest in the axiomatic point of view. The principal subject of this chapter should however be the study of parallel projections.

Similar considerations hold for the section "Orthogonality", which by the way can be postponed and taken in connection with "Congruence" if one wishes to treat the affine structure separately.

Instead of the traditional axioms of order, an axiomatization of the orientation of simplices as given in the section "Orientation" is proposed. For the line the transitions to ordering and betweeness are obvious, but contrary to these notions, orientation has analogues in the plane and in space. Such and analogy can, of course, also be achieved by axiomatizing the notions of half-line, half-plane, and half-space, but these notions are easily obtained from the axioms stated, and frequently more concise formulations of arguments and results are possible using orientation. Besides obvious properties of the orientations of simplices, it is explicitly postulated (D 1,6 and D 2,5) that one-to-one parallel projections preserve relations between orientations. Furthermore, a continuity axiom for the line (D 1,5), on which I shall comment presently, has been included.

Here as well as in the following chapters one may, to begin with, confine the study to the plane and add later on as much as necessary or desirable about space.

The next section, "Vectors", contains statements from which the usual axioms for vector spaces can be derived. In particular, on the basis of E 1-13 the additive group of vectors and thus the group of translations can be introduced and studied. Instead of defining vectors as equivalence classes of ordered pairs of points, as indicated, one could postulate the existence and the basic properties of translations. In many respects this would be preferable. However, taking into consideration that mappings as entities, characterized by more or less abstract properties, seem to be difficult to grasp and to work with for most beginners, one may find a more "constructive" definition appropriate at the level in question. On the basis of the two last statements (E 14-15), divisibility of a vector by a natural number and Eudoxus' axiom, together with the continuity axiom (D 1,5) mentioned above the multiplication of vectors by real numbers can be introduced, and thus a one-to-one correspondence between the real numbers and the vectors or points on a line can be established. Since the construction of such a correspondence requires quite a few simple but boring details, most teachers will prefer to postulate its existence and basic properties. This would be perfectly in accordance with the intent of the present setup. It would however imply that the distributive law for the product of a sum of vectors by a real number, that is, essentially the fundamental property of similar triangles, has to be postualted too, for instance thus: If a vector is multiplied by a real number, its parallel projection on a line is multiplied by the same number.

For didactical reasons and because of lack of time it will hardly be possible to pursue the vector space and affine aspects very far. One will have to involve the metric notions rather quickly, first of all to introduce rectangular coordinates and the scalar product. The axioms listed under "Congruence" are chosen such that a "constructive" definition of isometries can be given and that the existence and determination of the isometries of a line (F 3-4), of a plane (F 3-7), and of the space (F 3-10) can be inferred immediately. (Here as for translations, the axioms may be replaced by statements postulating the existence and uniqueness of certain isometries, e.g. symmetries with respect to lines.) The remaining axioms (F 11-14) establish the connection between congruence and the relations previously introduced. That isometries preserve collinearity, coplanarity, parallelity, orthogonality and equality of vectors, follows easily. The scalar product can be defined by means of orthogonal projection of vectors. Its symmetry property follows from the existence of an isometry interchanging two given half-lines with common endpoint.

It is rather evident how to proceed from here on as far as the purely geometry aspect is concerned. The requirements of analysis necessitate however an early introduction of the measure of angles and of the trigonometric functions (of a real variable). On the basis given it is clearly possible to define the length of a circular arc and to prove its existence and principal properties in a sufficiently elementary way, but this would probably take too much time, and it would certainly come too late. Renunciation as to the systematic setup seems therefore unavoidable. Within the scheme described here, the difficulty can perhaps be overcome to a certain extent in the following way:

Immediately after the chapter on orientation the distance of points and the measure of angles is introduced by suitable axioms chosen such as to allow a simple introduction of rectangular coordinates and the trigonometric functions. Unfortunately, the clarifications which the use of vectors and isometries is apt to yield are partly lost in this way.

A SET OF "AXIOMS" FOR EUCLIDEAN GEOMETRY

Appendix to: "On the relation between synthetic and analytic geometry in secondary schools" by W. Fenchel.

Euclidean three-space is considered as the set of its points.

Notation:

( )col "collinear", ( )c$\not{o}$l "non-collinear",

( )cop "coplanar", ( )c$\not{o}$p "non-coplanar",

$\parallel$ "parallel", $\nparallel$ "non-parallel",

$\perp$ "orthogonal",

$\ominus$ "equally oriented", $\not\ominus$ "oppositely oriented",

$\#$ "represent the same vector",

$\cong$ "congruent".

A. Collinearity and Coplanarity.

1,1. (ABC)col is a relation in the set of triples of points symmetric in the points of each triple.

1,2. A = B implies (ABC)col for any C.

1,3. A $\neq$ B, (ABC)col and (ABD)col imply (ACD)col.

1,4. If A $\neq$ B, there exists a C such that (ABC)cøl.

2,1. (ABCD)cop relation in the set of quadruples of points symmetric in the points of each quadruple.

2,2. (ABC)col implies (ABCD)cop for any D.

2,3. (ABC)cøl, (ABCD)cop and (ABCE)cop imply (ABDE)cop.

2,4. (ABCD)cop and (CDE)col imply (ABCE)cop.

2,5. If (ABCD)cop and (AB'C'D')cop, there exists an E $\neq$ A such that (EBCD)cop and (EB'C'D')cop.

2,6. If (ABC)cøl, there exists a D such that (ABCD)cøp.

B. Parallelity.

1,1. AB ∥ A'B' is an equivalence relation in the set of pairs of distinct points symmetric in the points of each pair.

1,2. AB ∥ A'B' implies (ABA'B')cop.

1,3. AB ∥ A'B', (A'B'C')col and A' ≠ C' imply AB ∥ A'C'.

1,4. AB ∥ A'B' and AB ∥ A'C' imply (A'B'C')col.

1,5. AB ∥ A'B' and (ABA')c∅l imply (ABB')c∅l.

1,6. If AB ∦ A'B' and (ABA'B')cop, there exists a P such that (ABP)col and (A'B'P)col.

2,1. ABC ∥ A'B'C' is an equivalence relation in the set of triples of non-collinear points, symmetric in the points of each triple.

2,2. ABC ∥ A'B'C', (A'B'C'D')cop and (A'B'D')c∅l imply ABC ∥ A'B'I

2,3. ABC ∥ A'B'C' and ABC ∥ A'B'D' imply (A'B'C'D')cop.

2,4. ABC ∥ A'B'C' and (ABCA')c∅p imply (ABCB')c∅p and (ABCC')c∅p.

2,5. If ABC ∦ A'B'C', there exists a P such that (ABCP)cop and (A'B'C'P)cop.

C. Orthogonality.

1. $AB \perp A'B'$ is a relation in the set of pairs of distinct points symmetric in the pairs and in the points of each pair.

2. $AB \perp A'B'$ and $A'B' \parallel A''B''$ imply $AB \perp A''B''$.

3. $AB \perp A'B'$, $AB \perp A''B''$ and $(ABA'B'A''B'')$cop imply $A'B' \nparallel A''B''$.

4. $AB \perp A'B'$, $AB \perp A'C'$ and $AB \perp A'D'$ imply $(A'B'C'D')$cop.

5. $AB \perp A'B'$, $AB \perp A'C'$, $A' \neq D'$ and $(A'B'C'D')$cop imply $AB \perp A'I$

6. $AB \perp A''B''$, $AB \perp A''C''$, $A'B' \perp A''B''$, $A'B' \perp A''C''$ and $(A''B''C'')$c$\not{o}$l imply $AB \nparallel A'B'$.

7. If $A \neq B$, to every A' there exists a $B' \neq A'$ such that $AB \perp A'B'$ and $(ABA'B')$cop.

8. If (ABC)c$\not{o}$l, to every A' there exists a $B' \neq A'$ such that $AB \perp A'B'$ and $AC \perp A'B'$.

D. Orientation.

1,1. $AB \ominus A'B'$ is an equivalence relation in the set of pairs of distinct points on a line.

1,2. $AB \ominus A'B'$ implies $BA \not\ominus A'B'$, and $AB \not\ominus A'B'$ implies $BA \ominus A'B'$

1,3. $AB \ominus BC$ implies $AB \ominus AC$.

1,4. If $A \neq B$, there exists P and Q such that $AP \ominus PB$ and $AQ \ominus BQ$

1,5. If m and n are non-empty subsets of a line such that $AB \ominus A'B'$ for all $A, A' \in m$ and all $B, B' \in n$, then there exists a P such that $AP \ominus PB$ for all $A \in m$, $A \neq P$ and all $B \in n$, $B \neq P$.

1,6. $(ABCD)$col, $(A'B'C'D')$col, $AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel DD'$ and $AB \ominus CD$ imply $A'B' \ominus C'D'$.

2,1. $ABC \ominus A'B'C'$ is an equivalence relation in the set of triple of non-collinear points of a plane.

2,2. $A_1A_2A_3 \ominus A_1'A_2'A_3'$ implies $A_\lambda A_\mu A_\nu \ominus A_1'A_2'A_3'$ if λ, μ, ν is an even permutation of 1, 2, 3, and $A_1A_2A_3 \not\ominus A_1'A_2'A_3'$ implies $A_\lambda A_\mu A_\nu \ominus A_1'A_2'A_3'$ if λ, μ, ν is an odd permutation of 1, 2, 3.

2,3. $(ABA'B')$col and $AB \ominus A'B'$ imply $ABC \ominus A'B'C$.

2,4. $ABC \not\ominus ABC'$ if and only if there exists a P such that (ABP)col, (CPC')col and $CP \ominus PC'$.

2,5. $(ABCDEF)$cop, $(A'B'C'D'E'F')$cop, $AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel DD' \parallel EE' \parallel FF'$ and $ABC \ominus DEF$ imply $A'B'C' \ominus D'E'F'$.

3,1. $ABCD \ominus A'B'C'D'$ is an equivalence relation in the set of quadruples of non-coplanar points.

3,2. $A_1A_2A_3A_4 \ominus A_1'A_2'A_3'A_4'$ implies $A_\lambda A_\mu A_\nu A_\rho \ominus A_1'A_2'A_3'A_4'$ if λ, μ, ν, ρ is an even permutation of 1,2,3,4 and $A_1A_2A_3A_4 \not\ominus A_1'A_2'A_3'A_4'$ implies $A_\lambda A_\mu A_\nu A_\rho \ominus A_1'A_2'A_3'A_4'$ if λ, μ, ν, ρ is an odd permutation of 1,2,3,4.

3,3. $(ABCA'B'C')$cop and $ABC \ominus A'B'C'$ imply $ABCD \ominus A'B'C'D$.

3,4. $ABCD \not\ominus ABCD'$ if and only if there exists a P such that $(ABCP)$cop, (BPD')col and $DP \ominus PB'$.

E. Vectors.

1. $AB \# A'B'$ is an equivalence relation in the set of pairs of points.

2. $AB \# BA$ implies $A = B$.

3. $AB \# A'B'$ implies $AA' \# BB'$.

4. $AB \# A'B'$ implies $BA \# B'A'$.

5. $AB \# A'B'$ and $BC \# B'C'$ imply $AC \# A'C'$.

6. If A, B and A' are given there exists <u>one</u> B' such that $AB \# A'B'$.

7. $A \neq B$ and $AB \# A'B'$ imply $AB \parallel A'B'$.

8. $A \neq B$, $AB \# A'B'$ and $(ABA'B')$col imply $AB \ominus A'B'$.

9. (ABC)cøl, $AB \# A'B'$, $AC \parallel A'C'$ and $BC \parallel B'C'$ imply $AC \# A'C'$.

10. $(ABA'B')$cøl, $AB \parallel A'B'$ and $AA' \parallel BB'$ imply $AB \# A'B'$.

11. (ABC)col, $AB \# A'B'$ and $BC \# B'C'$ imply $(A'B'C')$col and $A'B' \overset{\ominus}{\not\ominus} B'C'$ according as $AB \overset{\ominus}{\not\ominus} BC$.

12. (ABC)cøl, $(ABCA')$cop, $AB \# A'B'$ and $AC \# A'C'$ imply $(ABCA'B'C')$cop and $ABC \ominus A'B'C'$.

13. $(ABCD)$cøp, $AB \# A'B'$, $AC \# A'C'$ and $AD \# A'D'$ imply $ABCD \ominus A'B'C'D'$.

14. If $n > 1$ is a positive integer and $A \neq B$, there exist points $A_0 = A, A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}, A_n = B$ such that $A_{\nu-1}A_\nu \# A_\nu A_{\nu+1}$, $\nu = 1,2,\ldots,n-1$, and these points are uniquely determined.

15. If (A_0A_1B)col and $AA_1 \ominus AB$, there exist a positive integer n and points $A_2, A_3, \ldots, A_n$ such that $A_{\nu-1}A_\nu \# A_\nu A_{\nu+1}$, $\nu = 1,2,\ldots,n-1$, and $AB \ominus BA_n$.

F. Congruence.

1. $AB \cong A'B'$ is an equivalence relation in the set of pairs of points, symmetric in the points of each pair.
2. $AB \cong CC$ if and only if $A = B$.
3. If $A \neq B$ and $A' \neq C'$, there exists *one* B' such that $AB \cong A'B'$, $(A'B'C')$col and $A'B' \ominus A'C'$.
4. (ABC)col, $(A'B'C')$col, $AB \cong A'B'$, $AC \cong A'C'$ and $A'B' \overset{\ominus}{\not\ominus} A'C'$ according as $AB \overset{\ominus}{\not\ominus} AC$ imply $BC \cong B'C'$.
5. (ABC)col and $ABC \cong A'B'C'$ imply $(A'B'C')$col.
6. If (ABC)cøl, $AB \cong A'B'$ and $(A'B'D')$cøl, there exists *one* C' such that $AC \cong A'C'$, $BC \cong B'C'$, $(A'B'C'D')$cop and $A'B'C' \ominus A'B'D'$.
7. $(ABCD)$cop, $(A'B'C'D')$cop, $ABC \cong A'B'C'$, $ABD \cong A'B'D'$ and $A'B'C' \overset{\ominus}{\not\ominus} A'B'D'$ according as $ABC \overset{\ominus}{\not\ominus} ABD$ imply $CD \cong C'D'$.
8. $(ABCD)$cop and $ABCD \cong A'B'C'D'$ imply $(A'B'C'D')$cop.
9. If $(ABCD)$cøp, $ABC \cong A'B'C'$ and $(A'B'C'E')$cøp, there exists *one* D' such that $AD \cong A'D'$, $BD \cong B'D'$, $CD \cong C'D'$ and $A'B'C'D' \ominus A'B'C'E'$.
10. $ABCD \cong A'B'C'D'$, $ABCE \cong A'B'C'E'$ and $A'B'C'D' \overset{\ominus}{\not\ominus} A'B'C'E'$ according as $ABCD \overset{\ominus}{\not\ominus} ABCE$ imply $DE \cong D'E'$.
11. $AB \# A'B'$ implies $AB \cong A'B'$.
12. $(ABA'B')$col, $AB \ominus A'B'$ and $AB \cong A'B'$ imply $AB \# A'B'$.
13. (ABC)cøl, $(ABCC')$cop, $ABC \not\ominus ABC'$ and $ABC \cong ABC'$ imply $CC' \perp AB$.
14. $AB \perp AC$ and $AC \# C'A$ imply $BC \cong BC'$.

DISCUSSION FOLLOWING PROFESSOR FENCHEL'S LECTURE.

Dieudonné. Fenchel's axiom system is very pleasant (it resembles Choquet's), but it is not necessary to do in details in three dimensions the same things which have already been done in two dimensions.

Fenchel. I don't intend to give the theory of vector spaces twice. But it is necessary to give a precise description of certain concepts and facts in three dimensional space.

It is important to make the pupils interested in mathematics, we must give them something to "play with", and I am afraid that they will find it dry, if we reduce geometry to the theory of vector spaces.

Dieudonné. In Choquet's exposition you can find hundreds of interesting problems.

- - -

Fenchel. It is not important in school to build geometry on as few axioms as possible. It is difficult for many pupils to follow a strict axiomatic exposition with a long chain of small theorems, apparently self-evident, where it is necessary to prove the theorems in a fixed order.

Suranyi. The pupils shall learn mathematical thinking as well as mathematical facts. From the intuitive understanding we shall gradually axiomatize - find the smallest number of conditions for a given theorem. We might introduce superfluous axioms in order to show the direction we have to follow when we shall build the axiom system.

Dieudonné. It is all right to start with too many axioms, but we shall tell the students when we do so.

Choquet. There shouldn't be many axioms. It is better with a smaller number of strong axioms, such that students can learn "the rules of the game".

Fenchel. It is a good idea when Choquet arranges the axioms in groups. Then it is possible in the beginning to work with a part of the axiom systems.

Servais. This (what Fenchel just said) is very important. It has been cirticized that the parallel axiom is introduced separately. But this is exactly the way one has to work: Introduce axioms, deduce, introduce more axioms, deduce, etc.

Dieudonné. The teaching of children up to the age of 15 should gradually give them the feeling that an axiomatization is needed.

ÜBER DIE GENAUIGKEIT IM GEOMETRIEUNTERRICHT

von G. Hajós

Ich war eigentlich vorbereitet,nur über die Lücken und logischen Fehler im Geometrieunterricht zu sprechen. Da ich aber insbesondere von der Elementargeometrie sprechen wollte, und hier diese als Unterrichtskapitel stark angegriffen wurde, sei es mir gestattet,erst einiges in ihrer Verteidigung zu sagen. Besser gesagt, will ich Gesichtspunkte erwähnen, die für die Elementargeometrie sprechen, nachdem schon vieles gegen sie gesprochen wurde.

1. Als erstes muss ich das Geschichtliche betonen, da der Unterricht nie von der Entwicklung losgerissen werden kann.

2. Es ist wesentlich, vordem man von der analytischen Behandlung des geometrischen Stoffes spricht, den Stoff selbst kennen zu lernen.

3. Beim Unterricht des Anfängers ist es immer zweckmässig, einfache Dinge einfach zu behandeln, d.h. den ihm einfachen geometrischen Tatbestand nicht durch zu jener Zeit unnötiges, wie die analytische Behandlung mit Koordinaten oder Vektoren, zu stören.

4. Die Elementargeometrie mit seinen vielen einfachen Problemen ist ein unerschöpfliches Übungsgebiet, das kaum durch ein anderes ersetzt werden kann. Die Fülle von einfachen Problemen ist es, die dem Schüler die logische Freude entgegenbringt.

5. Auch wenn der Elementargeometrieunterricht etwas Zeit dem Unterricht der hervorragendsten Schüler entnimmt, schadet das nichts, da diese viele Mittel zu ihrem Selbstunterricht besitzen. Ich denke insbesondere an die für die Schüler bestimmten mathematischen Blätter und Bändchen, wie wir sie in Ungarn seit langem haben.

6. Sollte in der Zukunft in den letzten Jahren der Oberschule die Geometrie rein analytisch behandelt werden, so müssen die Lehrer, um auch in den unteren Klassen richtig unterrichten zu können, doch auch in die Elementargeometrie tiefer eingehen. Das spricht schon dafür, dass dieses Kapitel auch an der Universität nicht völlig beiseite geschoben werden soll.

7. Sollte eine langsame Entwicklung alles Elementargeometrische aus dem Unterricht fortschaffen - was kaum zu denken ist - so müssen wir heute die Übergangszeit ins Auge fassen. Das bedeutet nicht nur das Reduzieren des Stoffes, sondern auch das Reinigen des Fortzuschaffenden.

All dies spricht natürlich nicht für Euklid selber, oder für das Aufrechterhalten des heutigen Unterrichtes, wohl aber für den Unterricht einer kurzgefassten und schwindelfreien Elementargeometrie.

Was aber schwindelfrei ist, kann nur dann festgestellt werden, wenn die Beziehung des Unterrichtes zur Axiomatik hinreichend geklärt ist. In dieser Hinsicht gibt es verschiedene Möglichkeiten:

a) zu jeder Zeit, wenn nötig, neue Tatsachen der Erfahrung und der Anschauung entnehmen,

b) am Anfang oder vor jedem Soffteil Grundtatsachen zu erwähnen, und dann alles auf diese aufzubauen,

c) dasselbe zu machen, aber auch nach Verminderung der Grundtatsachenanzahl zu streben, was schon Axiomatisieren genannt werden kann,

d) die Verminderung nach dem Hilbertschen Muster möglichst weit fortzuführen,

e) weniger darzubieten, um die axiomatische Methode binnen des zur Verfügung stehenden Rahmens durchführen zu können. Merkwürdigerweise ist dies desto bequemer, auf je höheres Kapitel man sich beschränkt.

Den Schwindel habe ich natürlich nicht als Methode erwähnt, wenn man nämlich zu axiomatisieren behauptet, und doch unbewiesenes Anschauliches benutzt.

Ich kann und wollte es gar nicht entscheiden, welche Methode die richtige ist. Die Erfahrungsgeometrie dient nur als Einleitung, die axiomatische Methode nimmt viel Zeit und Mühe in Anspruch. Irgendwo muss man aber die strenge Behandlung beginnen. Meistens geschieht das an der Universität, und mit der analytischen Geometrie. Das ist vielleicht ein Grund, warum hier viele eben von diesem Axiomatisieren gesprochen haben.

In Ungarn behandeln wir seit einigen Jahren an der Universität durch etwa zehn Wochen auch die Elementargeometrie, um die Vorkenntnisse der Studenten zu vereinheitlichen und zu festigen. Dem Zeitverlust kann der Vorteil gegenübergestellt werden, dass man dadurch, in gewissem Sinne, die Gesamtgeometrie in strengerer Behandlung darbieten kann.

Im Folgenden will ich kurz darüber berichten, wie das geschieht. Da meine (ungarisch gefasste) für die erstjährigen Studenten bestimmte "Einleitung in die Geometrie" dieses Jahr erscheint, kann ich auch sagen, ich berichte über meine Sorgen, die ich während des Schreibens hatte.

Das erste Kapitel über die Grundbegriffe war mir das Schwierigste. In der Vorlesung entspricht dies etwa 1 Woche. Dieses Kapitel enthält die Vorkenntnisse, die sich auf die Raumelemente, Bewegung, Messen, Winkel, einfachste ebene und räumliche Bereiche, Kongruenz und Symmetrie beziehen. Hier werden nur Grundtatsachen erzählt, damit in den späteren Kapiteln alles (mit späterer Zuhilfenahme des Parallelenaxioms) streng behandelt werden könne.

Dieses Kapitel kann also als erweitertes Axiomensystem betrachtet werden. Anfangs werden zehn Axiome erwähnt, aus welchen alle anderen erwähnten Tatsachen abgeleitet werden könnten. Diese sind:

1. Zwei Punkte bestimmen eine einzige Gerade.
2. Drei nicht kollineare Punkte bestimmen eine einzige Ebene.
3. Zwei Punkte einer Ebene bestimmen eine Gerade, die in der Ebene liegt.
4. Ein Punkt zerschneidet die Gerade in zwei Halbgeraden; verbindet man zwei innnere Punkte dieser Halbgeraden, so enthält die Verbindungsstrecke den zweiteilenden Punkt; verbindet man andere Punktpaare, so liegt die Verbindungsstrecke in einem der Halbgeraden.

5 und 6 sagen das Entsprechende für die Zweiteilung der Ebene in Halbebenen, und des Raumes in Halbräume.

7. Es gibt eine räumliche Bewegungsgruppe, deren Elemente Halbgeraden (Geraden und Ebenen) in gleiche Gebilde überführen.

8. Es gibt eine einzige Bewegung, die eine vorgegebene Fahne (Halbebene mit am Rande angegebener Halbgerade) in eine vorgegebene andere überführt.

9. Zu den Strecken gehören positive Zahlen als Längen derart, dassdie Bewegungen längentreu sind, und bei Zweiteilung einer Strecke die Summe der Teilstreckenlängen der Länge der Gesamtstrecke gleich ist.

10. Ist die Einheitsstrecke vorgegeben, so gehört zu jeder positiven Zahl auf einer Halbgerade ein einziger Punkt, dessen Abstand vom Anfangspunkt die angegebene Zahl ist.

Es soll betont werden, dass es hier von den räumlichen Bewegungen die Rede war. Dieser Umstand macht es möglich, die Orientationsfragen im einführenden Kapitel zu erledigen. Es wird nämlich gesagt, dass zwei Halbräume samt an ihren Randebenen angegebenen Fahnen dann gleich orientiert sind, wenn sie durch eine Bewegung in einander überführt werden können. Diese Frage steht in engem Zusammehang mit den Anfängen der Stereometrie, die didaktisch gewiss klarer ist, wenn räumliche Bewegungen als Vorkenntnisse vorausgesetzt werden.

Als Hauptschwierigkeiten des einführenden Kapitels kann ich noch die verschiedenen Winkelbegriffe, die Behandlung der Polygone und Polyeder, ferner das topologisch klare Einführen des Durchschnittes und des Zerschneidens erwähnen. All dies würde natürlich wegfallen, wenn man sich, um die Sorgen zu vermeiden, auf weniger beschränken wollte. Ich trachtete aber nicht nur im ersten Kapitel, sondern auch später, den ganzen geometrischen Stoff zu behandeln, wie er im praktischen Leben sich darbietet und in den Oberschulen vorkommt. Diese Stellungsnahme hat zur Folge, dass binnen der Elementargeometrie auch Bogenlänge, Flächeninhalt und Rauminhalt streng behandelt werden muss. Das Schwierigste von allem war vielleicht der Flächeninhalt krummer Flächen, wo ich mich auf durch konvexe Polyeder aus konvexen geschlossenen Flächen ausgeschnittene Flächenteile beschränkte, um bekannte differentialgeometrische Schwierigkeiten zu vermeiden.

Die Kegelschnitte kommen nur im zweiten, die analytische Geometrie behandelnden Teile vor, werden aber auch elementargeometrisch behandelt. In diesem Zusammenhang kann ich zwei Probleme erwähnen, die merkwürdigerweise mir Probleme waren.

Das eine ist der Beweis, dass die elementargeometrisch definierte Parabel nur einen Brennpunkt hat, das andere, den bekannten Beweis mit den Dandelinschen Kugeln in einen vollständigen Beweis zu ergänzen. Beides ist natürlich nur dann ein Problem, wenn man möglichst einfach durchkommen will.

Es könnte noch manches auch in der analytischen Geometrie erwähnt werden, was die Meinung unterstützt, dass es viel Mühe kostet, in den Anfangskapiteln der Geometrie volle Ordnung zu schaffen, auch wenn die Behandlung nicht axiomatisch ist, sondern nur auch vom axiomatischen Standpunkte aus klar genannt werden kann. Die wesentliche Schwierigkeit entsteht daraus, dass die Geometrie nicht nur verständlich, sondern - man könnte manchmal wohl sagen, leider - auch anschaulich ist.

Wie ich es schon sagte, ist es gar nicht meine Absicht, es entscheiden zu wollen, welche Unterrichtsmethode am besten zum Ziele führt. Allerdings gilt das Gebot, dass man auch in kleinsten Einzelheiten weder lügen, nocht schwindeln darf. Ich selber bin dafür, dass man anstatt das unklar Behandelte wegzuwerfen, Ordnung schaffen soll, auch wenn die Zukunft in Bezug auf einiges für das Wegwerfen entscheiden sollte.

DISCUSSION FOLLOWING PROFESSOR HAJÓS' LECTURE.

Fenchel. I should like to mention a general problem: The concept of a proof is subjective. For a child a proof is something which convinces the child, e.g. folding a piece of paper. The axiomatization helps to refine the concept of a proof. Through the education the sense of criticism must be sharpened gradually (this process goes on even at university). A subject like incidence geometry in the space is very useful when it is a question of showing the idea of a proof derived from axioms. There are relatively few axioms, and there are many simple relations which the pupils don't know beforehand.

Straszewicz. We have now heard various teaching suggestions of eminent mathematicians. According to those suggestions a large number of traditional teaching items should be discarded, e.g. the properties of triangles, various constructions etc. I am not sure whether that agrees with the requirements of physicists, technicians etc. Perhaps the technicians need some of the subjects which we want to abolish.

Pickert. Triangle geometry has a philosophical origin, not a technical. The purpose of teaching triangle geometry has always been training in logical reasoning. Actually the technicians need knowledge of vector spaces and some background for technical drawing.

Servais. If we ask the technicians what they want from the teaching of mathematics in school, they will answer that primarily they want people to be able to think logically. Apart from that they will mention the subjects they know themselves. And therefore we have a serious responsibility. We must find out what is undoubtedly important.

Viola. We mustn't forget the psychological background of the children. It is necessary that they understand the language we use, and they should learn to like mathematics.

Bundgaard. As an argument for teaching elementary geometry professor Hajós mentioned that here you find many interesting problems, which appeal to the pupils. I don't think it is surprising that we know many geometrical problems adequate for (and to a great extent invented for) use at instruction; geometry has been studied for more than 2000 years. Professor

Hajós also hinted that pupils have a natural geometric intuition which makes this subject especially fitted for elementary teaching. But I think that we can develop intuition in many mathematical fields. The selecting of topics for the teaching is a matter of great importance; it should be worth while for the pupils to use time on the subjects we choose.

Hajós. Mankind started mathematical thinking in geometry. I am not convinced that children in the future will find other subjects as natural as geometry. I doubt that this has anyrhing to do with training.

It is impossible to learn everything axiomatically. If we only teach axiom systems we lose a lot of mathematical knowledge.

Choquet. There is a certain sclerosis in old teachers. They cannot learn new concepts. This you don't find in children. The criterion of what to teach is that the subjects should have a certain axiomatic simplicity.

Viola. We must distinguish between what is too complicated and what is too abstract. The axioms of ordering aren't too complicated but too abstract.

Choquet. Many things, which now seem very abstract, will probably in the future seem easy and natural. It is possible that there isn't reality behind speaking about things being "too abstract" for children.

Servais. There must be a certain content in the axioms. We shouldn't hide the properties in many small axioms.

Bundgaard. We exaggerate the difficulties of axioms. For example, many teachers think that ordering relations are very difficult because they didn't learn about them when going to school themselves.

Freudenthal. We could teach everything, drive the children in any direction. But there exist other things at school. We must see the whole together.

Dieudonné. No. We are here to discuss mathematics and nothing else.

LOGIK ALS GEGENSTAND UND ALS METHODE*

von Hans Freudenthal.

In meinem Lande besteht ein Jahrgang der Jugend aus etwa 250000 Jungen und Mädchen. Von ihnen gehen etwa 25000 zur höheren Schule. Etwa 5000 von diesen studieren an Universitäten und Hochschulen; etwa 1000 wählen heutzutage Mathematik, Physik und Astronomie (wenn ich die physikalischen Ingenieure mitrechne). Etwa 150 werden dies Studium als Mathematiker beendigen, und unter ihnen werden zwei oder drei pro Jahr durch regelmässige Publikationen zum Wachstum der mathematischen Forschung beitragen.

Mich interessiert hier die Mathematik für die 25000, nicht nur weil ich hoffe, dass ich pro Jahr aus dieser Schar über die zwei bis drei hinaus noch einen oder zwei rekrutieren kann, die der Mathematik auf höchstem Niveau dienen sollen, sondern vor allem, weil ich glaube, dass für sehr viele unter diesen 25000 Mathematik etwas wesentliches bedeuten kann und muss. Auf dass dieser Glaube sich erfülle, spähe ich nach meinen Methoden, den Lehrstof zu durchgründen und zugänglich zu machen. Neue Gegenstände mögen wichtig sein für die 5000, für die 1000, für die 150 - den 25000 werden sie Steine statt Brotes bedeuten, wenn wir die didaktisch-pädagogischen Probleme nicht besser verstehen lernen.

Was ich hiermit meine, will ich an einigen Beispielen erläutern. Das erste ist das einer Fünfzigjährigen, die Sprachen studiert hat, aber die sich immer noch mit Begeisterung des schönen Mathematik-Unterrichts ihrer Schulzeit erinnert. Sie hat seitdem keine Mathematik mehr betrieben; auch nicht mit ihren Kindern, denn in dem Falle war es der Vater, der den Kindern bei den Rechen- und Mathematik-Aufgaben half. Es war bei einem Spaziergang am Waldesrand, als sie Holzfäller mit Baumstämmen beschäftigt sah und fragte: "Wieviel wiegt so ein Baum?"

*) Teilweise eine Übersetzung von "Logica als methode en als onderwerp", Euclides 35, 241-271 (1959/60).

Nach einigem Zögernd fuhr sie fort: "Kann man das ausrechnen?" Und dann fing sie an, in ihrem Gedächtnis nach der Formel zu suchen, nach der Formel für das Volumen des Zylinders (obwohl sie den Namen "Zylinder" vergessen hatte). Sie fand die richtige, und das war kein Zufall, denn schon für den Zylinder gibt es ja ihrer wenigstens drei, und da kommen noch drei hinzu für den Kegel, einige für Kugeln, Prismen und Pyramiden, vielleicht auch noch für abgestumpfte. Aber in den Mathematikstunden hatte sie eben auch gelernt, nicht aufs Geratewohl, sondern intelligent, zielbewusst zu suchen. Wieviel π war, hatte sie vergessen, aber sie rekonstruierte noch, dass es etwas grösser als 3 sein müsse. Sie schätzte die Länge und Dicke des Baumes in Dezimetern, und das war besonders intelligent. Und schliesslich fragte sie nach dem spezifischen Gewicht von Holz - auch das darf ich nicht vergessen zu erwähnen.

Ja, werden Sie sagen, wenn das der Wert der Mathematik sein sollte, dass man auf einem Spaziergang das Gewicht eines Baumes ausrechnen kann, dürfen wir auf die Mathematik ruhig verzichten. Aber glücklicherweise gibt es da etwas, das schwerer wiegt als eine Schwarzwaldtanne: die Freude, wenn es einem gelingt, sie auf der Wage des Verstandes zu wägen. Die Freude auch dessen, der zusieht, wie ein anderer sich freut.

Eine zweite Geschichte, die von einem kleinen Jungen, kaum vier Jahre alt, der mit seinem Vater spazieren ging, und dem sein Vater klar machte, dass ein Rechteck, vier Einheiten breit und drei hoch, zwölf Flächeneinheiten betrage. Nein, genauer: nicht <u>dass</u> es so war, sondern <u>warum</u>. Der Junge ist Mathematiker geworden, und er erinnert sich immer noch jenes Augenblickes und des Staunens über das Wunder, das sich ihm offenbarte. Vielleicht wurde damals über seinen Lebensweg entschieden.

Andere Mathematiker beschreiben den grossen Augenblick anders. Mehrmals las ich in Lebenserinnerungen, dass es der Satz vom Schnittpunkt der Mittelsenkrechten war, bei dem dem Jungen die Augen aufgingen. Ein Satz mit einem eindrucksvollen Beweise, logisch-psychologisch überwältigend, weil an einem unübertrefflichen, nicht-trivialen Beispiel

$$MA = MB, \; MB = MC, \text{ also } MA = MC$$

die Macht der Transitivität einer Relation demonstriert wird.

Es ist sicher kein Zufall, dass diese Geschichten um die Geometrie spielen. Mit Zahlen kann der jugendliche Geist Kunststücke treiben, aber die Wunder entdeckt und schafft er im Raume.

Wozu unterrichten wir diese nutzlose deduktive Geometrie, fragte ich vor einigen Jahren. Weil Geometrie als logisches System - antwortete ich - ein Mittel, und wohl das beste Mittel, ist, Kinder die Macht des mathematischen Geistes erleben zu lassen - das heisst, die Macht ihres eigenen Geistes.

Darum möchte ich auf die deduktive Geometrie nicht verzichten, wenigstens solange ich das Kind nicht auf anderen Gebieten Entdeckungen von der psychologischen Wucht der drei angeführten machen lassen kann.

Die Macht des menschlichen Geistes erleben zu lassen - sagte ich und fügte hinzu: das heisst, ihres eigenen Geistes. Seine Bewusstwerdung in der Mathematik ist die Logik. Langsam und stetig vollzieht sie sich im Unterricht. In den Lehrbüchern zeichnet sich das Streben zur Klärung der logischen Begriffe ab, leider nicht immer in glücklichster Weise. Verfassern von Lehrbüchern ist es häufig nicht klar, dass man nicht alles formell definieren kann. Lieber eine schlechte Definition als keine - ist ein verfehltes Prinzip. Ein Ausdruck, dessen Bedeutung der Schüler im Klassengespräch begreift, braucht sich nocht nicht in einer Definition durch wohlgebaute Sätze fassen zu lassen. Aber trotzdem findet man in Lehrbüchern Definitionen für "Lehrsatz", "Voraussetzung", "Behauptung", "Beweis", ja sogar eine Definition dessen, was eine Definition sei. Was da betrieben wird, ist nicht Logik, sondern Verbalismus.

In der traditionellen Didaktik ist das Explizieren der Logik ein Stück der Geometrie. Das zeigen viele Lehrbücher. Ein moderner Bericht, der dem Mathematik-Unterricht und dem Mathematik-Lehrer neue Wege weisen soll, wie das "Program for college preparatory mathematics (College Entrance Examination Board 1959; mit Anhängen), ist noch ganz von dieser Tradition erfüllt. Wie tief die Tradition wurzelt, dass Logik dem Geometrie-Unterricht angehöre, sieht man, wenn in der Algebra Fragen behandelt werden, wie die Äquivalenz von Gleichungen (oder Ungleichungen). Bei diesem ganz vorzüglich logischem Gegenstand wird der Horizont möglichst auf die Algebra der Gleichungen und Ungleichungen beschränkt; man vermeidet ängstlich die so natürliche Weitung des Blickes auf die Äquivalenz von Aussagen, das heisst, Aussagen nicht nur über Gleichungen und Ungleichungen, sonder über alles, was der Gegenstand einer Aussage sein könnte. Um es genauer zu formulieren: Die Äquivalenz der Gleichungen

$$2x^2 - 6x + 4 = 0,$$
$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

bedeutet logisch: die Aussagen

x genügt $2x^2 - 6x + 4 = 0$

x genügt $x^2 - 3x + 2 = 0$

sind gleichwertig, das heisst, haben gleichzeitig den Wert wahr oder falsch, ebenso wie die Aussagen

das Dreieck ABC ist gleichseitig,
das Dreieck ABC ist gleichwinklig.

Wie soll man die Union von Geometrie und Logik erklären? Offenbar als Folge der Ansicht, dass es in der Geometrie nicht, aber in der Algebra wohl ohne Logik gehe. In der Algebra verabfolgt man dem Schüler ein gut funktionierendes System von Regeln der Umformung gegebener Ausdrücke nach einem genau vorgeschriebenen Ziele hin. In der Geometrie gibt es nicht so zuverlässige Schemata. Fallgruben in der Algebra (denken Sie an die Division durch 0 oder die Multiplikation von Ungleichungen mit negativen Zahlen) eliminiert man nicht durch logische Analyse, sondern blockiert man durch Extra-Regeln.

Wie kommt in der Geometrie Logisches zur Sprache? Man denkt zuerst an das "Umkehren von Sätzen". Wenn bei zwei Aussagen p und q mit p auch stets q wahr (z.B. p: x ist Mensch; q: x ist sterblich), so sagen wir $p \longrightarrow q$ und fassen das als neue Aussage auf. Über das Paar p,q können die Wahrheitswerte falsch (0) und wahr (1) sich auf viererlei Art verteilen,

p	q	$p \longrightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

$p \longrightarrow q$ ist dann und nur dann als falsch anzusehen, wenn p wahr und trotzdem q falsch ist.

Von der Aussage "x ist Mensch $\longrightarrow$ x ist sterblich" gibt nicht die Umkehrung. Algemein brauchen $p \longrightarrow q$ und $q \longrightarrow p$ nicht gleichzeitig zu gelten. Ist das wohl der Fall, so sagt man $p \longleftrightarrow q$. Dann sind p und q gleichwertig. Oder aber: p dann und nur dann wenn q . Noch anders, statt $p \longrightarrow q$: q ist notwendige Bedingung für p , und p hinreichend für q . (Zum Mensch-Sein ist das Sterblich-Sein notwendig, aber nicht hinreichend; zum Sterblich-Sein ist das Mensch-Sein hinreichend, aber nicht notwendig).

In der Geometrie kennen wir Sätze mit zusammengesetzter Voraussetzung und Behauptung, die verschiedenartig umgekehrt werden können. Man betrachte hinsichtlich der Vierecke ABCD die folgenden Aussagen:

$$p:\quad AB \parallel CD,$$
$$q:\quad AD \parallel BC,$$
$$r:\quad AB = CD,$$
$$s:\quad AD = BC.$$

Mit den Zeichen $\wedge$, $\vee$ für "und" und "oder" gilt dann

$$(p \wedge q) \longleftrightarrow (r \wedge s),$$
$$(p \wedge r) \longleftrightarrow (q \wedge s).$$

Aber $q \wedge r$ kann wahr sein, ohne dass p oder s wahr sind (wie Beispiele zeigen). Alle Möglichkeiten hinsichtlich p, q, r, s sind daher im Schema

p	1	1	0	1	0	0	0	0
q	1	0	1	0	1	0	0	0
r	1	0	1	0	0	1	0	0
s	1	1	0	0	0	0	1	0

beschlossen.

Nun ein Beispiel aus einem anderen Gebiet, um zu zeigen, dass trotz traditionell verschiedener Terminologie die Logik überall dieselbe ist: Wir betrachten zweimal differentierbare Funktionen f und einen Punkt a (einen inneren Punt des Definitionsintervalls), ferner die Aussagen

p: $f'(a) = 0$,
q: $f''(a) > 0$,
r: $f''(a) < 0$,
s: f hat ein Maximum in a,
t: f hat ein Minimum in a.

Dann gilt $(s \vee t) \longrightarrow p$, $(p \wedge q) \longrightarrow t$, $(p \wedge r) \longrightarrow s$, aber auch nicht mehr. Für p, q, r, s, t sind also die Kombinationen

p	0	0	1	1		
q			1		1	
r				1	1	
s	1			0		1
t		1	0			1

ausgeschlossen (an den Leerstellen kann willkürlich 0 oder 1 stehen). Alle (acht) anderen Kombinationen sind möglich.

Neben der Umkehrung ist ein traditioneller logischer Gegenstand in der Geometrie der indirekte Beweis. Das ist eigentlich erstaunlich. Denn bei dem logisch elementaren Charakter der Geometrie sollte man meinen, dass der indirekte Beweis in der Geometrie, die wir auf der Schule betreiben, überflüssig sei. Zieht man die Lehrbücher zu Rate, so sieht man diese Vermutung bestätigt. Die Verfasser scheinen sich gewaltig angestrengt zu haben, ein Beispiel eines indirekten Beweises ausfindig zu machen, und sie scheinen selber mit dem Resultat nicht ganz zufrieden zu sein. Meistens wird irgendein Satz, der schon direkt bewiesen war, hinterdrein nochmals indirekt hergeleitet. Sie können die Stelle, wo der indirekte Beweis vorgeführt wird, auffinden, wenn Sie einfach blättern und aufpassen, wo in einer Figur eine ausgezogene Gerade mit einer punktierten ganz in der Nähe erscheint. Im Texte lesen Sie dann so etwas wie "nehmen wir an, dass die Gerade nicht durch P ginge ..." - um diese Annahme anschaulich zu unterstützen, hat der Verfasser mit dem rechten Ohr auf dem Schreibtisch versucht, eine falsche Gerade zu sehen und zu zeichnen. In einem Stadium, wo der Schüler noch verzweifelt ringt mit dem Verhältnis zwischen Logik und Anschauung, ist so etwas eine fragwürdige Illustration des indirekten Beweises.

Wie schwierig die Didaktik des indirekten Beweises ist, zeigen die zahlreichen falschen Erklärungen, die man zu diesem Gegenstand in Schulbüchern findet. Auch die vorhin zitierte amerikanische Handleitung behandelt den indirekten Beweis unbefriedigend. Kann man zum Beispiel von einem indirekten Beweis sprechen, wenn man die Negation einer positiven Aussage p beweist, indem man aus p einen Widerspruch ableitet? Formell ja, aber psychologisch und didaktisch nicht. Denn ein mathematisch Ungeübter, der gerade die Worte "beweisen" und "Negation" hat gebrauchen lernen, kann mit der Wortfolge "die Negation von .... beweisen" kaum einen Sinn verknüpfen. Für ihn kann $\neg p$ nur die Widerlegung von p bedeuten, und die führt er (direkt und nicht indirekt) durch, indem er aus p einen Widerspruch ableitet.

Es ist auch kein indirekter Beweis, wenn man etwa aus "wenn $PA = PB$, so liegt P auf dem Mittellot von AB" ableitet "ist P nicht auf dem Mittellot von AB, so ist $PA \neq PB$ ". Der Übergang von der einen Aussage zur anderen geschieht durch Kontraposition, und dies Prinzip ist wohl die Grundlage des indirekten Beweises, aber selber kein indirekter Beweis. $p \longrightarrow q$ bedeutet, dass die Wahrheit von p die vom q nach sich zieht; aber dann ist ohne Kunstschlüsse klar, dass die Unwahrheit von q die von p zur Folge hat. Natürlich kann man wie alle einfachen Dinge auch dieses komplizieren durch eine Schlusskette: Gegeben $p \longrightarrow q$, Voraussetzung $\neg q$, Behauptung $\neg p$, Nimm an $\neg\neg p$, also p ; aus dem Gegebenen folgt dann q , im Widerspruch zur Voraussetzung. Also $\neg p$. Hier werden, um den indirekten Beweis nachzuahmen, viele Worte verwendet für etwas, das elementarer ist als der indirekte Beweis. - Wohl fällt es auf, dass Geometriebücher, die den indirekten Beweis behandeln, die Figur der Kontraposition häufig nicht erwähnen.

Bedeutet das alles nun, dass der indirekte Beweis aus dem Unterricht zu verschwinden habe?

Durchaus nicht. Versuche, den indirekten Beweis abzuschaffen, sind recht aussichtslos. Wie einer Hydra wachsen ihm für jeden abgeschlagenen Kopf sieben neue. Aber die Rolle des indirekten Beweises ist eine ganz andere als die, die er den Lehrbüchern spielt. Der indirekte Beweis ist und soll sein: die Erscheinungsform der ungehemmten Aktivität des Schülers. Das indirekte Argumentieren ist eine allgemein geübte Tätigkeit ("Peter ist zu Hause, denn sonst wäre der Riegel nicht vorgelegt"), und obwohl ich niemals eine Schulklasse unterrichtet habe, wage ich es zu behaupten, dass ein Schüler, den man mit einem Problem allein lässt, ganz von selber anfängt, zu argumentieren:

" ... denn wäre es nicht so, so müsste ...". Vielleicht könnten erfahrene Lehrer mit Beobachtungsgabe einmal darauf achten, ob ich recht habe.

Der indirekte Beweis hat vor allem eine heuristische Funktion. Ich will das noch an einem Beispiel zeigen, das mehr Ihrem Niveau entspricht: Ich zeichne ein quadratisches Gitter in der Ebene (d.h. die Menge der Punkte mit ganzen Koordinaten). Um welche Punkte gibt es nicht triviale Drehungen der Ebene, die das Gitter in sich überführen? Natürlich können Sie die Punkte gleich angeben: die Eckpunkte des Gitters, die Mittelpunkte der Gitterstäbe und die der Gittermaschen. Aber wie soll man begründen, dass das die vollständige Lösung sei? Ganz unwillkürlich fängt man an: "wäre etwa ...". Wäre etwa P solch ein Punkt auf dem Gitterstab AB und näher zu A als zu B, so wäre P näher zu A als zu irgendeinem anderen Gitterpunkt, und so hätte A keinen Gitterpunkt, in dem er bei der Drehung übergehen könnte. Läge P im Inneren der Maschen $ABCD$ und nicht auf dem Mittellot von AB, so ...

Hinterdrein werden Sie natürlich versuchen, die Umwege abzuschneiden und die indirekte Schlussweise zu vermeiden. Indirekte Beweise stehen sozusagen im Unreinen. Aber ein Geometriebuch oder eine Geometriestunde sind Reinschriften; da passt ein indirekter Beweis nicht hinein. Will der Lehrer dem Schüler erzählen, was ein indirekter Beweis ist, so konstruiere er keine Beispiele, sondern ertappe den Schüler bei einem indirekten Beweise und bringe ihm, was er unbewusst getan hat, zum Bewusstsein.

Um Ihnen nun die Logik im Algebra-Unterricht zu demonstrieren, schreibe ich die Gleichung

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

auf. Schüler sind geneigt, auf so etwas mit

$$x = 1 \text{ und } x = 2$$

zu reagieren (wo dann das "und" nur gesprochen, aber nicht geschrieben wird). Ein Lehrer, der es genau nimmt, bemerkt dann "x = 1 <u>und</u> x = 2 verträgt sich nicht". Ein wohl dressierter Schüler antwortet nun: Ich meine,

$$x = 1 \quad \text{oder} \quad x = 2.$$

Der Lehrer beschliesst solch einen Zwischenfall mit der Moral: Wenn du "oder" meinst, so schreibe es auch auf.

Ich würde dem Lehrer nun fragen: Warum wollen Sie ihn "oder" schreiben lassen, wenn wir dafür seit Jahrzehnten das Zeichen $\vee$ haben? Sie lassen ihn doch auch nicht "Wurzel aus Klammer auf a plus b Klammer zu ins Quadrat" schreiben.

Aber das ist nocht nicht alles. "x = 1 und x = 2" ist nämlich auch eine richtige Antwort. Es fragt sich nur worauf. Im Geometrie-Unterricht betrachtet der Mathematik-Lehrer es als seine Aufgabe, dem Kollegen der Muttersprache ins Handwerk zu pfuschen. Da muss in ganzen Sätzen gefragt und geantwortet werden. In der Algebra dagegen genügt ihm jede zusammenhangslose Folge von Wörtern - von Ausrufen, könnte man sagen. Denn in der Algebra ist es Schema, wo man geht und steht. Wenn der Lehrer $x^2 - 3x + 2 = 0$ aufschreibt, weiss der Schüler schon, dass er die x, die dem genügen, bestimmen muss, und wenn die Gleichung $x^2 - 3ax + 2a^2 = 0$ lautet, rechnet der Schüler beileibe nicht a, sonder x aus. Aber dann darf man dem Schüler auch nicht verbieten, den Lehrer zu behandeln als jemanden, der an einem halben Wort genug hat. "x = 1 und x = 2" ist richtig, denn der Schüler meint damit: "x = 1 ist eine Lösung, und x = 2 ist eine Lösung". Oder aber:

$$[(x=1) \longrightarrow (x^2-3x+2 = 0)] \wedge [(x=2) \longrightarrow (x^2-3x+2 = 0)],$$

was äquivalent ist mit

$$[(x=1) \vee (x=2)] \longrightarrow (x^2-3x+2 = 0).$$

Das einzige, was der Lehrer hierauf antworten könnte, und was zöge, wäre: "und keine anderen Lösungen?" Denn damit erst wird

$$(x^2-3x+2 = 0) \longrightarrow [(x=1) \vee (x=2)] \quad .$$

ausgedrückt.

Das Wort "Algebra" könnte man in der Schulpraxis übersetzen mit "Gebrauchsanweisung zum Ausfüllen von Schemata" - oder noch krasser: von vorgedruckten Formularen. Der vorgedruckte Text ist dem Gedächtnis des Schülers eingegraben; er hat nur aufzuschreiben, was zwischen den vorgedruckten Worten stehen soll. Das Resultat ähnelt dem, was man hört, wenn man bei einem Telephongespräch nur nach einem Teilnehmer lauscht: "Ja ... ja ... nein ... jaaa ... drei ... nein ..." Mit viel Scharfsinn kann man vielleicht im Tonfall und Mienenspiel entdecken, wovon der andere Teilnehmer spricht. Ich bewundere jährlich bei der Durchsicht der schriftlichen Abituriumsarbeiten den scharfsinnigen Lehrer, der weiss, welches vorgedrucktes Formular der Schüler gerade ausfüllt. Denn das ist der Fluch der Algebra: dass es mehrere, ja viele vorgedruckte Formulare gibt, und dass das gegenseitige Verständnis nicht gedeiht, wenn der eine meint, dass es sich um eine Steuerklärung handelt, während der andere an einen Postscheck dachte.

Auch in der Geometrie gibt es diese vorgedruckten Formulare, aber da lassen sie sich nicht so mechanisch ausfüllen; da kommt man nicht so weit mit ihnen wie in der Algebra. Das ist einer der Gründe, weshalb die Geometrie als Schule der Logik renommierter ist als die Algebra. Ein geometrischer Beweis, der etwas taugt, ist eine schlüssige Auseinandersetzung. Eine Algebra-Aufgabe ist eine Ausfüllübung ohne Zwischentext. Wenn die Schüler für ihre logische Ausbildung von der Algebra genau so viel haben sollen wie von der Geometrie, so muss der Lehrer bei einer Algebra-Aufgabe dieselben formalen Forderungen stellen wie bei einem geometrischen Beweise (und das ist durchaus nichts Unerhörtes, denn wer eine Algebra-Aufgabe löst, ist ja mit einem Beweis beschäftigt). Natürlich wäre es für den Schüler langweilig, das im Gedächtnis vorgedruckte Formular wörtlich zu reproduzieren (~~und~~ für den Lehrer, das durchzulesen). Aber das ist ja auch nicht nötig. Denn seit Vieta (ungefähr 1600) haben wir eine algebraische und seit Peano (ungefähr 1900) eine logische Symbolik. Ich dringe bei uns seit Jahren darauf, dass man sich ihrer im Schulunterricht systematisch bedient. Ich muss allerdings zugeben, dass ich damit nicht den geringsten Erfolg habe. Ins neue Programm für die Mathematiklehrerprüfungen ausserhalb der Universität (wir liefern heute bei uns das Gros der Mathematik-Lehrer) hat man die mathematische Logik bewusst nicht aufgenommen, und das bedeutet, dass die logische Symbolik mindestens eine Generation von der Schule ferngehalten wird.

Wie wenig Schulmänner sind davon durchdrungen, dass es so etwas gibt wie eine Syntax der mathematischen Sprache! Bei einer Analyse von Algebrabüchern habe ich kürzlich notiert: Klammern scheinen dazu da zu sein, dass man sie vertreibt. Nirgendwo findet man systematische Versuche, die Syntax der Algebra dem Schüler nahe zu legen. Inzwischen wirkt diese Syntax sich auch im logischen Stile des Mathematikers entscheidend aus.

Eines der wichtigsten syntaktischen Mittel, in denen die mathematische von der Gemeinsprache abweicht, ist der systematische Klammergebrauch. Soll der Schüler mathematisch sprechen lernen, so muss ihm dieses syntaktische Mittel bewusst gemacht werden. Hierüber wäre viel zu sagen, aber das werde ich lieber anderswo tun.

Inzwischen komme ich nochmals auf die Formel

$$[(x^2-3x+2 = 0)] \longleftrightarrow [(x=1) \vee (x=2)]$$

zurück. Es ist eine Formel, die für alle x gilt, im Gegensatz etwa zu

$$x^2 = 1,$$

das nur für manche x gilt. "Alle" und "manche" heissen in der Logik Quantoren. Mit Quantoren treibt die Umgangssprache ein neckisches Spiel (desto grösser ist hier die Verantwortung des Mathematiklehrers). In den Sätzen "In einem Dreieck ist die Winkelsumme 180°" und "Zeichne ein Dreieck" zielt "Ein Dreieck" einmal auf alle Dreiecke und das andere Mal auf "es gibt ein Dreieck ...". Gegen diese Schlamperei der Umgangssprache helfen auch keine Zahlworte. Mit "Zwei Dreiecke sind kongruent ..." und "Zeichne zwei Dreiecke" stehen wir vor demselben Dilemma: "alle Paare von Dreiecken" oder "es gibt ein Paar ..."?

"Für alle x gilt F(x)" bedeutet

$$F(a) \wedge F(b) \wedge F(c) \wedge \ldots,$$

und dafür schreibe ich kürzer

$$\bigwedge_x F(x).$$

"Es gibt ein x, so dass F(x) gilt" bedeutet

$$F(a) \vee F(b) \vee F(c) \vee \ldots,$$

kürzer:

$$\bigvee_x F(x).$$

Lasst uns diese Zeichen einüben! Mit x K y meine ich: x ist Kind von y. (Für die Variabeln setzen wir nur Menschen ein.)

$\bigvee_x \bigvee_y$ x K y: es gibt jemand, der Kind ist.

$\bigvee_y \bigvee_x$ x K y: es gibt jemand mit einem Kinde.

$\bigvee_x \bigwedge_y$ x K y: es gibt jemand, der Kind ist von jedermann.

$\bigvee_y \bigwedge_x$ x K y: es gibt jemand, von dem jeder Kind ist.

$\bigwedge_x \bigvee_y$ x K y: jedermann ist Kind von jemand.

$\bigwedge_y \bigvee_x$ x K y: jedermann hat ein Kind.

$\bigwedge_x \bigwedge_y$ x K y: jedermann ist Kind von jedermann.

$\bigwedge_y \bigwedge_x$ x K y: jedermann hat jedermann zum Kinde.

Oder aber:

$G(x,t)$ bedeute: im Augenblick t greife ich das Ding x.
$S(x,t)$ bedeute: im Augenblick t sehe ich das Ding x.
$t < t'$ bedeute: t ist früher als t'.

Dies schreiben wir auf:

Ich sehe immer etwas.
Manchmal sehe ich nichts.
Jedes Ding sehe ich irgendwann.
Wenn ich etwas sehe, greife ich es sogleich.
Ich greife nichts, ich hätte es denn zuvor gesehen.

Lösungen:

$$\bigwedge_t \bigvee_x S(x,t).$$
$$\bigvee_t \neg \bigvee_x S(x,t).$$
$$\bigwedge_x \bigvee_t S(x,t).$$
$$\bigwedge_t \bigwedge_x (S(x,t) \longrightarrow G(x,t)).$$
$$\bigwedge_t \bigwedge_x \{\neg G(x,t) \vee \bigvee_{t'} [(t'<t) \wedge S(x,t')]\}.$$

Den letzten Satz kann man übrigens auch interpretieren als:

$$\bigwedge_t \bigwedge_x \{G(x,t) \longleftrightarrow \bigvee_{t'} [(t' < t) \wedge S(x,t')]\}.$$

In einem demnächst auf holländisch erschienenden Büchlein habe ich Hunderte solcher Beispiele zusammengetragen. Sie dürfen natürlich fragen: was haben diese ausgekochten Beispiele mit dem Mathematik-Unterricht zu tun? Ich behaupte: sehr viel.

Mit dem Aufeinander~~stapeln~~türmen der Quantoren "es gibt" und " "alle" erschrecken wir wie jungen Leute, die von den Klassenräumen in die Hörsäle umziehen. Denken Sie nur an die Definition der Stetigkeit: f heisst stetig für x_0, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle x aus $|x-x_0| < \delta$ folgt: $|f(x)-f(x_0)| < \varepsilon$. Also

$$\bigwedge_{\varepsilon}((\varepsilon>0) \rightarrow \bigvee_{\delta}\{(\delta>0) \wedge \bigwedge_{x}[(|x-x_0|<\delta) \rightarrow (|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon)]\})$$

Stetigkeit ohne weiteres und gleichmässige Stetigkeit erfordern noch einen Quantor $\bigwedge_{x_0}$, der einmal im Anfang und das andere Mal bei dem $\bigwedge_{x}$ zu stehen hat. Es sind diese Quantoren, die den Stetigkeitsbegriff so schwierig machen. In einem der Vorträge wurde die Schuld dem Ungleichheitszeichen aufgebündet. Den muss ich aufgrund unserer niederländischen Erfahrungen widersprechen. Bei uns übt man die Ungleichungen vom Anfang der Algebra an. Das macht den Schülern keine nennenswerten Schwierigkeiten und doch stranden sie auf der Universität bei der Stetigkeit.

Die gehört zu den komplizierten logischen Strukturen, die man in der modernen Mathematik, insbesondere in der Analysis, nicht entbehren kann. Der Mathematikstudent soll sich so schnell wie möglich an sie gewöhnen. Mit einem Aufschub gewinnt er nichts. Je früher der Student mit Quantoren geimpft wird, desto besser wird er das Quantorenfieber überstehen.

Wie kommt es, dass die Schulmathematik es schafft, ohne Quantoren aufeinander zu türmen? Die Frage stellte ich mir vor einigen Jahren. Die Antwort überraschte mich. Was stellte sich heraus? Auch die Schulmathematik kennt diese gefährlichen Quantorentürme, und zwar (bei uns) gerade in der Algebra, die doch logisch einfacher sein soll als die Geometrie. Ich entnahm meine Beispiele einer exemplarischen Sammlung von 250 Aufgaben (Euclides 32, 97-152, 1956/67). In den Büchern findet man meistens noch viel komplizierteres Material. Ich zitiere einige dieser Kaskaden-Aufgaben:

Nr. 49: a) Welcher Bedingung müssen a und b genügen, wenn

$$-x^2 + ax + a + b$$

für alle x negativ sein soll?

b) Welcher Bedingung muss b genügen, wenn es Werte von a geben soll, die genannter Bedingung genügen?

Symbolisch:

$$?_b \bigvee_a \bigwedge_x (-x^2 + ax + a + b < 0).$$

(Ausser den bekannten Quantoren sehen Sie hier noch $?_b$, das natürlich bedeutet: "welche b haben die Eigenshaft ...".)

Ein anderes Beispiel:

Nr. 69: a) Beweise, dass das Minimum von $x^2 + px + q$ für kein Wertepaar von p und q grösser ist als $p+q+1$.

b) Für welchen Wert von p und q ist das Minimum gleich $p+q+1$?

$$\bigwedge_{p,q} \left\{ \left[\bigvee_x (x^2+px+q = y) \wedge \neg \bigvee_x (x^2+px+q < y) \right] \longrightarrow (y>p+q+1) \right\}.$$
$$?_{p,q} \left\{ \left[\bigvee_x (x^2+px+q = y) \wedge \neg \bigvee_x (x^2+px+q < y) \right] \longrightarrow (y=p+q+1) \right\}.$$

Doch gibt es einen riesigen Unterschied zwischen diesen Beispielen und dem der Stetigkeit. Die gefährlichen Quantoren in diesen Beispielen sind zahnlose Löwen. Dem Quantor $\bigwedge_x$ in

$$\bigwedge_x (-x^2+ax+a+b < 0)$$

sind die Zähne gezogen mit Hilfe der Diskriminante. Der Schüler weiss bei uns mechanisch, dass obiger Ausdruck äquivalent ist mit

$$a^2 + 4(a+b) < 0,$$

und damit ist der Aufgabe reduziert auf

$$?_b \bigvee_a \left[a^2 + 4(a+b) < 0 \right].$$

Aber der nächste Quantor, $\bigvee_a$, ist genau so senil. Die Diskriminante reduziert das Problem auf

$$?_b (16 - 16b > 0),$$

und nun hat der Prüfling die erste Gelegenheit, sich zu blamieren, denn nachdem ihm soviel quadratische und gebrochene Ungleichungen eingepaukt worden sind, kann er kaum noch wissen, was man mit Linearen anfängt.

Mit meinem zweiten Beispiel steht es ganz analog. Zwischen den eckigen Klammern steht die Aussage "y ist das Minimum von $x^2 + px + q$", die zwei eingemachte "es gibt"-Quantoren enthält. Glücklicherweise braucht der Prüfling sie nicht aus dem Weckglas oder aus der Sardinenbüchse zu holen, denn er verfügt ja über ein Rezept, sie unschädlich zu machen. Er schreibt das

Minimum der Funktion hin, und alle Komplikationen lösen sich in dem Wohlgefallen der Frage

$$?_{p,q}(-p^2 + q = p + q + 1)$$

auf. Wie schwierig solche Aufgaben werden, wenn statt der landesüblichen quadratischen Funktionen andere (etwa die viel einfacheren linearen) auftreten, merken sie, wenn sie spassehalber über die Wahrheit der Aussagen

$$\bigvee_z \bigwedge_y \bigvee_x (xy = z),$$
$$\bigwedge_z \bigvee_y \bigwedge_x (xy = z),$$
$$\bigwedge_x \bigvee_y \bigwedge_z (xy = z),$$

nachdenken.

In den beiden zitierten Beispielen begegneten wir <u>algoritmischen</u> Quantoren, d.h. wir konnten algorithmisch eine Aussage $\bigwedge_x F(x)$ reduzieren auf eine ohne den Quantor $\bigwedge_x$, und wir konnten bei der Aussage $\bigvee_x F(x)$ gleich alle x aufzeigen, für die die Aussage zutrifft. In der Definition der Stetigkeit dagegen fehlt jeder Hinweis auf einen Algorithmus, der uns zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ liefert mit den bekannten Eigenschaften, und auch die alle-Quantoren lassen sich mit algorithmischen Mitteln nicht eliminieren (es sei denn, man beschäftige sich mit speziellen Funktionenklassen).

Es sind gerade die nicht-algorithmischen Quantoren, die sich der Fassungskraft des Anfängers entziehen. Sie können sich zu Hunderten auftürmen, aber auch der Geübte kann Türme von mehr als drei oder vier Stockwerken nicht mehr mit einem Blicke umfassen. Er verschafft sich die nötige Übersicht, indem er jeweils ein Türmchen von drei oder vier wie einen Rollmops aufwickelt und mit dem Etikett "Definition" beklebt. Zum Beispiel steckt in der Definition der Stetigkeit der Begriff der Funktion. Eine Funktion ist eine solche Menge G von Zahlenpaaren $\ulcorner x,y \urcorner$ (die graphische Darstellung), dass zu jedem x ein und nur ein y gehört mit $\ulcorner x,y \urcorner \in G$. Sie sehen hier den alle- und den es-gibt-Quantor, aber in dem Rollmops "nur ein" verbirgt sich noch ein alle-Quantor. Symbolisch lautet die Funktionendefinition

$$\bigwedge_x \bigvee_y \left\{ (\ulcorner x,y \urcorner \in G) \wedge \bigwedge_{y'} \left[(\ulcorner x,y' \urcorner \in G) \longrightarrow (y'=y) \right] \right\}.$$

Diese durch nicht-algorithmische Quantoren komplizierte Struktur verbirgt sich hinter dem unschuldigen Wort "Funktion", das in der Stetigkeitsdefinition vorkommt. Ausserdem setzt jene Definition natürlich den Begriff der reellen Zahlen voraus, dem eine logische Tiefe von sicher einigen Dutzenden von Quantoren in Serie zukommt. Wer mit diesen Begriffen arbeiten will, muss auf jeder Stufe die verborgenen Quantoren aus den Rollmöpsen auswickeln können, ohne Hoffnung auf algorithmische Elimination.

Natürlich wird der geübte Dozent, auch noch an der Universität, seinen Studenten das Verständnis erleichtern, indem er zweckmässig Quantoren einmacht oder algorithmisiert. Wie man das macht, habe ich in einer holländischen Buchbesprechung auseinandergesetzt. In einem modernen Lehrbuch der analytischen Geometrie fand ich nach der Einführung des Vektorraumes folgende

"Definition: Der n-dimensionale affine Raum V^n ist eine Menge von Dingen, Punkte genannt, mit einem Atlas K, d.h. einem System von Karten $k, k', \ldots: V^n \longrightarrow A^n$, eineindeutigen Abbildungen auf den n-dimensionalen Vektorraum A^n, und mit folgenden Eigenschaften:

I. Zu zwei Karten $k, k' \in K$ gibt es einen Vektor $d \in A^n$ so, dass, wenn a und a' bzw. Bilder desselben Punktes von V^n auf den Karten k und k' sind, immer

(1) $$a' = a + d$$

gilt, mit anderen Worten, wenn k^{-1} die inverse von k ist, dass

(2) $$a' = k'k^{-1}a = a + d \quad \text{für jedes } a \in A^n$$

gilt.

II. Umgekehrt gibt es zu jedem $k \in K$ und $d \in A^n$ eine Karte $k' \in K$, für die (2) gilt."

Hier haben wir eine doppelte Auftürmung von vier Quantoren: "die erste es gibt einen Atlas mit der Eigenschaft: für jedes Paar von Karten aus dem Atlas gibt es ein d, so dass für jedes Paar $a, a', \ldots$ gilt $a' = a + d$; "der zweite Turm steckt analog in II.

Es ist klar, dass diese Quantoren künstlich hineingesteckt sind. Wie eliminiert man sie?

Man bemerkt zunächst, dass der Verfasser bei (1) die naheliegende Bezeichnung "Translation" vermeidet. "Für alle a, a' mit ... gilt $a' = a+d$" ist eine unnötig komplizierte Redeweise für "$a \longrightarrow a'$ ist eine Translation über den Vektor d". Damit haben wir einen Quantor eingemacht. "Es gibt ein d, so dass für alle a, a' gilt $a' = a+d$" wird einfach: "$a \longrightarrow a'$ ist eine Translation". Damit ist der zweite Quantor verschwunden. (Dies ist eine typische Methode: man definiert erst d-Translation und lässt dann still und leise das d weg.) Aber wir sind noch lange nicht fertig. Die Quantoren über die Karten sind aus einem Versäumnis entstanden. Wir haben vergessen, die Karten zu numerieren. Die Bezeichnung "Karten k, k', ..." ist unzweckmässig. Wir können ja jeder Karte einen algorithmischen Namen verleihen: wir notieren bei k als Index den Punkt, der durch k auf den Ursprung abgebildet wird, also $k_p p = 0$. Die Definition lautet nun:

Der affine Raum V^n ist eine Menge mit einem Atlas K von Karten k_p, ..., so dass

1) $k_p p = 0$, 2) $k_{p_1} q - k_{p_2} qq$ konstant (d.h. unabhängig von q).

Aber es geht noch schöner. Man mache sich zur Regel, dass im Algorithmus keine unnötigen Komplikationen vorkommen. Warum soll man denn das p bei k_p als Index schreiben? Wir können doch $k_p q$ als Funktion von zwei Variabeln auffassen. Und die schreiben wir dann natürlich als Differenz $q-p$ (statt $k_p q$). Damit ist auch der entsetzliche Atlas verbrannt. Die Definition lautet jetzt:

Der affine Raum V^n ist eine Menge mit folgender Struktur: Es ist eine Abbildung von $V^n \times V^n$ auf den Vektorraum A^n ausgezeichnet. Diese Abbildung heisst die Subtraktion der Punkte von V^n; das Bild von $\ulcorner p,q \urcorner \in V^n \times V^n$ heisst $q-p$ und ist Element von A^n (ein Vektor). Bei festem p ist die Abbildung $q \longrightarrow q-p$ "eineindeutig auf"; $p-p = 0$; $(q-p_1) - (q-p_2)$ konstant, also $= p_2-p_1$.

Die letzten drei Forderungen lauten einfacher:

(1) $(q-p) + (r-q) = r-p$.

(2) $q - p = 0$ impliziert $q = p$.

(3) Die Gleichung $q-p = x$ besitzt bei gegebenen $x \in A^n$ und $p \in V^n$ eine Lösung. Diese (einzige) Lösung wird auch $p+x$ geschrieben.

Natürlich kann man auf diese Definition des affinen Raumes auch geradenwegskommen. Wenn man nicht mit der Axiomatik, sondern mit einer phänomenologischen Analyse anfängt, wird man mit Sicherheit auf diese oder eine ähnliche Definition geführt.

Nach dieser Abschweifung komme ich auf die Kaskadenaufgaben zurück. Dies Beispiel der Definition des affinen Raumes zeugt von unzweckmässigen Erschwerungen. Bei den Kaskadenproblemen haben wir unzweckmässige Erleichterungen kennen gelernt. Zu niedriges Niveau kann nämlich ebenso gefährlich sein wie zu hohes. Die Quantorentürme der Kaskadenaufgaben sind Schwindel, Vortäuschung logischer Tiefe, wo es keine gibt. Zu leicht sagt man von solchem Übungsstoff: Nützt er nichts, so schadet er auch nicht. Aber das ist gerade die Frage. Es ist die Frage, ob die Schwierigkeiten, die jede echt mathematische Aufgabe den Schülern macht, insbesondere die Schwierigkeiten beim Übergang zur Universität oder zur irgendeiner unmittelbaren Anwendung der Schulmathematik, nicht eine Folge des Drills auf logische Scheintiefe sind. Könnte nicht durch das ständige Exerzieren mit algorithmischen Quantoren das Verständnis für nicht-algorithmische blockiert sein? Im Hinblick auf analoge Erscheinungen muss die Antwort - fürchte ich - "ja" lauten. Mich beschleicht sogar eine doppelte Furcht, die vor einer doppelten Blockierung. Durch diese Art von Übungen wird nicht nur beim Schüler, sondern auch beim Lehrer etwas blockiert, und das ist vielleicht schlimmer, denn der junge Mensch hat mehr Aussichten, die Blockade einmal zu durchbrechen.

Bei der Lehrerbildung gehen wir von dem Axiom aus, dass wer lehrt, mehr wissen soll als nur das, was er lehrt. Dies "mehr" bezieht sich nicht nur auf den Lehr<u>stoff</u>. Der Lehrer soll, was er lehrt, in einer Form wissen, die anders ist als die, in der er es lehrt. Er soll nicht nur über dem Stoff stehen, den er unterrichtet, sondern über der logischen Form des Stoffes. Dazu muss er die logische Tiefe des Stoffes loten können. Dabei hilft ihm die Logik, wenn sie mehr ist als: indirekter Beweis, Umkehren von Sätzen, Äquivalenz u.s.w. Der Mathematiklehrer soll nicht Logik unterrichten, sondern sich der Logik bedienen, und er soll die Logik, deren der Schüler sich bedient, ihm bewusst machen.

Vom Lehrer sollte man noch mehr verlangen: dass er auch über die von ihm selbst gewählten Methode der Darbietung des Stoffes steht, und dass er sich selbst diese Methode bewusst machen kann. Auch bei dieser Aufgabe kann die logische Analyse helfen. Nicht in dem trivialen Sinne, dass die logische Struktur es sei, die die Methode bestimme, sondern weil man logisch analysierend das Niveau der Einsicht erkennen und ihre logische Relation ermitteln kann. Wie viel man hierbei von der Mathematik lernen kann, haben die von Hiele's gezeigt: nach ihnen bedeutet jedes neue Niveau von Einsicht die Metatheorie des vorhergehenden Niveaus.

Die symbolische logische Methode soll vom Schüler - ich sage nicht, soviel wie möglich, sonder soviel wie nötig - angewandt werden. Sollten wir damit die Elementargeometrie überflüssig machen (ich glaube es nicht), so werde ich ihr keine Träne nachweinen. Aber symbolische Logik im Unterricht bedeute nicht ein neues Schulfach Logik. Die krampfhafte Propaganda für neuen Lehrstoff im Schulunterricht läst mich ziemlich kalt. Es ist ein schlechtes Zeichen, dass man sich so wenig Sorgen macht über die didaktischen Probleme. Manche meinen, dass jedes logisch kohärente System sich unterrichten lasse, und leider wird diese Meinung im Laboratorium-Experiment auch noch bestätigt. Aber die Klasse ist kein Laboratorium. Wollen wir etwas Neues einführen, müssen wir an den Lehrer appellieren. Wir müssen mit ihm zusammen Lehrstoff und Methode analysieren, mit allen verfügbaren Mitteln und auf dem höchsten Niveau. Die symbolische Logik ist da unentbehrlich.

Some remarks with relation to the I.C.M.I. seminar.

Looking back, after two weeks have passed, I have very little to say. Most of the lectures were well prepared and to the point. Those which were primarily concerned with getting the reports for 1962 in a good shape certainly served their purpose.

It turned out to be good to concentrate as much as possible on geometry. Nobody will have expected to return home with in his pocket a solution of the problem of how to teach geometry. Indeed, this problem has not been solved, and it will be a long time to go before we reach a feasable solution. Choquet's contribution seems to me to show a direction which may not be altogether impracticable, but it has to be worked out in details. We must be careful not to take over slogans which do not have a mathematical and didactic background acceptable to teachers. This background still has to be created.

I want to draw the attention of the participants to the publications from the "School Mathematics Study Group", Yale University, U.S.A. In my opinion it contains valuable material, especially the plane geometry course and the course on matrix algebra, and I shall be happy to experiment with parts of it in Dutch schools. These American proposals are based on very careful considerations about the possibilities of school teaching. The Americans have the advantage of working in a big country with tremendous financial facilities, and the possibility of enlisting the cooperation of a large number of competent mathematicians and teachers, all speaking the same language. In addition, there exists in the U.S. a lot of opportunities to try out new ideas and proposals. The lack of such possibilities in Europe is a tremendous handicap. Of course, our countries have their advantages as well. So far we have been able to maintain standards which, for the moment, are not reached by the majority of the American High Schools. However, we must be aware of the danger lying in too rigorously prescribed programs. We must not stay behind when there are possibilities of experimenting with modern materials, whereever they may come from. The most important materials will be those created by ourselves, in our separate countries, and we must keep each other informed about what we are doing.

Luke Bunt
Utrecht, Holland.

COMMENTS ON THE DISCUSSIONS

by

L. Bunt
W. Fenchel
H. Freudenthal
W. Servais
J. Surányi
P. Thomsen
T. Viola.

Comment on the discussions.

Considering the discussions it seems not quite superfluous to recall the fact that our ideas of "good", "rigorous", "genuine" mathematics change rather strongly from generation to generation as weel as in the mind of the individual. All of us have refined our mathematical conceptions, gradually or in jumps, in school and at the university, and this process continues more or less in the mind of every mathematician. Therefore, it is hardly realistic in the mathematical education of young people to imagine or to aim at a sharp border line between an experimental intuitive stage and a final rigorous one.

Take for example the order relations in geometry and the Jordan curve theorem. Nobody will oppose their uncritical use, say for polygons and circles, on the primary level. The word "proof" is, of course, used there in its unrefined, ordinary sense: "something which convinces of the truth of a statement". Now, arguments tacitly based, e.g., on the Jordan theorem will be completely convincing not only for children. At what stage should one try to change this attitude? Certainly not before it is possible to explain that the theorem does not deal with pencil strokes, but with complicated abstract notions. Otherwise a statement to the effect that the theorem requires a difficult proof will be considered by the pupils as an empty phrase, a hobby of the teacher which has to be reproduced under the examination. Explicit avoidance of the theorem will have the same effect since the physics teachers will use it without inhibitions. A comprehension of the situation is impossible before the pupils are able to grasp much simpler things, e.g. the fact that one has to prove that a continuous function assumes every value between its greatest lower bound and its least upper bound, i.e,, much later than they should get acquainted with quite a lot of the geometrical topics under discussion.

Another example is the one-one correspondence between the real numbers and the points on a line. Will a statement postulating its existence in all its complexity be understood as an <u>axiom</u> by pupils who have never met with examples of axiomatic treatments of simple and strictly limited mathematical subjects? In their minds it will certainly not be more than a restatement of the well-known fact that the distance between two points can be measured by means of a ruler, and the nature of the arguments based on it will for them barely be distinguishable from that of the familiar arguments of the primary level. Further examples of this sort are provided by the disputed notions of angle.

Such diffusions of intuitive aspects into more advanced stages and a certain vagueness of what is to be considered as rigorous are not confined to any particular level. Many such cases are known to us, and more and more are disclosed in consequence of the very development of mathematics. However, this does not imply that all of them can be removed from mathematical education. A little example shows this quite clearly. In some recent university text books for beginners the notion of an ordered pair is defined in terms of sets and subsets. At what level can such a definition be presented in a manner which persuades students that it makes sense at all? Surely a very long time after ordered pairs have been used by them for the first time. Speaking of sets, what about the naïve point of view in set theory?

The strongest argument in favour of the view that a sudden change from intuitive to rigorous mathematics and a clear distinction between "cheating" and being "honest" in elementary mathematical education hardly can be accomplished, has been pointed out by Freudenthal in his comments to the discussions. A fruitful axiomatic treatment of a subject presupposes among other things a considerable preciseness in the use of every day language. The rules according to which conclusions are drawn from the axioms not being formalized, the vagueness in the every day use of quite a few words, which serve to describe these rules, has to be removed. Other words, not occurring ordinarily in the language of young people, have to be introduced, and this, by the very nature of things, without formal definitions. Their meaning has to be narrowed in gradually by the way in which they are applied in many particular cases. (In this respect mathematics does not deviate in principle from other sciences.) No doubt, we have to do with a process which will take a long time, in any case for the overwhelming majority of the pupils.

Though there are various differences of opinion about the methods and contents, and even about the aim of mathematical education on the secondary level, mathematicians will certainly agree that it is an urgent task to try to accelerate as far as possible the mental process leading from intuitive perception to the understanding of what nowadays is considered genuine mathematics. Indispensible prerequisites are worked out, stringent expositions of the topics to be included. Therefore, the axiomatic systems for geometry presented by Pickert, Dieudonné and Choquet seem to me most valuable constributions which should be studied carefully by mathematics teachers. They display ways of avoiding the detours of the Euclid-Hilbert system in a consistent manner and may serve as guides to sensible treatments of geometry. For the reasons explained above, I am however afraid that the spirit in which they are conceived can be transferred to the pupils only gradually. How fast and to what extent will depend heavily on the skill and the tact of the teachers.

Werner Fenchel
Copenhagen, Denmark.

Diskussionsbemerkungen.*

1. Bei aller Mathematik, die wir auf der Schule unterrichten, haben wir uns immer wieder die Frage nach dem pädagogischen Wert zu stellen.

Insbesondere gilt das, wenn wir neuen Lehrstoff vorschlagen. Nach einem in unserer niederländischen Arbeitsgemeinschaft gebräuchlichen System will ich unterscheiden:

1) Materiellen Wert - der Schüler braucht den Lehrstoff unmittelbar in seinem zukünftigen Beruf oder bei seiner weiteren Ausbildung.

2) Formellen Wert - der Schüler lernt am Lehrstoff neue Arbeits- und Denkmethoden.

3) Philosophischen Wert - Erhöhung des Lebensgefühls, Ausweitung des Blickes, und ähnliches.

2. Ist der neu vorgeschlagene Lehrstoff von seinem Werte her gerechtfertigt, so erwartet man ein Programm. Das Programm lässt sich an der logischen Verkettung der einzelnen Programmpunkte allein nicht rechtfertigen. Es gibt ja an vielen Stellen Alternativen. Man setzt an solchen Stellen auseinander, warum man es so macht, und nicht anders. Das ist nicht schwierig; wer solch ein Programm entwirft, stelle nur ein Protokoll dessen auf, was er sich dabei denkt; er beobachte also seine eigene didaktische Tätigkeit. Ein fertiges Programm strahlt wenig didaktische Überzeugungskraft aus. Der Kommentar ist die Hauptsache.

Ein algemeiner didaktischer Hintergrund ist bei dem Fenohelschen Entwurf sehr deutlich wahrnehmbar. Bei den anderen habe ich didaktische Prinzipien nicht entdecken können, obwohl sie ursprünglich wohl vorhanden gewesen sein müssen, aber vermutlich in der Überarbeitung verschwunden sind.

3. Man vermeide zugunsten welchen Gegenstandes dann auch das Argument, dass er sich unterrichten lasse. Laboratorium-Versuche haben gezeigt, dass man alles Sinnvolle unterrichten kann (übrigens auch alles Sinnlose - nur dauert es dann etwas

*) Allgemein. Zusammenfassung der zu den verschiedenen Vorträgen.

länger).

Ich entsinne mich einer Dissertation, in der gezeigt wurde, wie man auf der Volksschule Schwachbegabten ein Vielfaches der geographischen Tatsachen beibringen kann, die er ohne diese raffinierten Methoden lernen würde; der Verfasser stellte sich nicht die Frage, wozu diese Wissenschaft dienen sollte. Es fällt auf, wie wenig die Laboratoriumversuche von Piaget für die Didaktik bedeuten. Didaktische Experimente sollen in einer naturgetreuen Klassensituation stattfinden. Das Wichtigste beim didaktischen Experiment ist das - möglichst wörtliche - Protokoll (siehe die Experimente von Dieke van Hiele - Geldof).

4. Ich gehe jetzt näher auf di Frage der geometrischen Axiomatik als neuen Gegenstand ein.

Materiellen Wert besitzt eine Axiomatik der Geometrie nur für diejenigen, die später auf ihr weiterbauen, d.h. Geometrie auf ihr als Grundlage betreiben sollen.

Das werden weitherzig gedacht 3-4°/o der Besucher höherer Schulen sein.

Aus dem Interesse dieser Gruppe heraus lässt die geometrische Axiomatik sich nicht rechtfertigen.

Vom philosophischen Werte her gibt es bessere Argumente für die geometrische Axiomatik. Doch führen zu diesem Ziele noch andere Methoden, die vielleicht zweckmässiger als die Axiomatik sind. Wenn man parallel zur Euklidischen die mit Hilfe der Sphäre anschaulich gemachte elliptische Geometrie behandelt, so lernt der Schüler die Relativität der Geometrie begreifen, ohne dass man sich axiomatisch sehr anzustrengen braucht. Es fragt sich sogar, ob der Schüler von dieser wichtigen Tatsache (der Relativität der Geometrie) aus den vorgeschlagenen Systemen überhaupt etwas lernen kann. Unter allen von der Euklidischen Geometrie abweichenden Geometrien zeichnen sich die Nicht-Euklidischen durch ihre grosse Anschaulichkeit aus. Die Abweichung von der Euklidischen Geometrie ist bei ihnen so wenig wie möglich pathologisch. Man denke auch an die physikalische Beduetung der Nicht-Euklidischen Geometrien!

Zugunsten der geometrischen Axiomatik müsste man sich hauptsächlich auf ihren formellen Wert berufen. Der formelle Wert einer fertigen Axiomatik (der Geometrie oder eines anderen

Gebietes) kann darin bestehen, dass sie das Beispiel eines Systems ist, indem

exakte Formulierungen,
lückenlose Deduktivität

möglich ist.

Zu beiden Zwecken eignen sich Systeme, wie sie uns vorgeführt wurden, weniger, und zwar einfach weil sie umfangsreich sind. Man muss sehr schnell auf exakte Formulierungen und lückenlose Deduktivität verzichten, will man vorwärts kommen. Durch den Umfang des Systems wird dem Lehrer das Überschlagen nahegelegt. Man kennt das auch vom heutigen Mathematikuntertícht, wo ganze Stücke in einen Verbalismus entarten, der nur das Gewissen des Lehrers befriedigen soll. An allerlei Stellen müssen die Schüler den Spruch auswendig lernen: "Den Beweis, der nichts prinzipiell Neues bietet, haben wir weggelassen".

5. Der eigentliche formale Wert der Axiomatik könnte darin bestehen, dass der Schüler lernt, einen Stoff axiomatisch zu ordnen. Da kommt es also nicht an auf das Hantieren des fertigen axiomatischen Systems, sondern auf sein Zustandekommen. Aber damit wird gleich ein umfassenderes Problem gestellt als das der Axiomatik. Dem axiomatischen Ordnen eines Stoffes geht das (noch nicht axiomatische) mathematische Ordnen entwicklungspsychologisch voran.

Ich übersehe nicht, wo auf der Schule heutzutage so etwas geübt wird. Im Anfangsunterricht der Geometrie lässt man sich soviel ich sehe, die einzigartige Gelegenheit entgehen, den Schüler den anschaulichen Stoff mathematisch ordnen zu lassen. Man fängt gleich mit einem schon mathematisch geordneten System an oder schaltet schnellstens zu ihm über. Im naturwissenschaftlichen Unterricht kommt das mathematische Ordnen eines nicht-mathematischen Stoffes wiederholt zur Sprache, aber im Mathematik-Unterricht wird es sehr wenig geübt. Die Folgen sieht man immer wieder, wenn ein Chemiker, Biologe u.s.w. zu einem kommt mit einem mathematischen Problem. Diese Leute haben gelernt mathematische Formeln zu bearbeiten, aber sie haben keinen Begriff, wie man etwas nicht-mathematisches mathematisch formuliert.

Nach dem Mathematisch-Ordnen kommt das Logisch-Ordnen; man konstatiert Zusammenhänge zwischen den mathematischen Tatsachen; man ersetzt aus logischem Bedürfnis Definitionen durch andere; man systematisiert. Auch dieses lokale Ordnen (lokal im Gegensatz zu dem globalen der axiomatischen Methode) wird auf der Schule nicht betrieben; man setzt dem Schüler lokal geordnete Systeme vor. Man schneidet sich wieder die Gelegenheit ab, beim Schüler gerade die Fähigkeiten zu üben, für die erfahrungsgemäss die grösste Aussicht auf Transfer of training besteht. Dies soll nun bei der Axiomatisierung fortgesetzt werden. Es ist nämlich nicht anzunehmen, dass der Lehrer die Axiomatik anders als fix und fertig auftragen wird, wenn er nicht schon auf niedrigerem Niveau gelernt hat, dem Schüler die Selbsttätigkeit des Ordnens anzuerziehen.

Als Beispiel nenne ich den Winkelbegriff, oder vielmehr die Winkelbegriffe, denn es gibt ihrer auf der Schule mindestens vier, den elementargeometrischen, den der Trigonometrie, den der analytischen Geometrie und den stereometrischen, wie ich in Behnkes "Grundzügen" auseinander gesetzt habe. Die phänomenologisch-logische Analyse dieses Begriffes ist eine vortreffliche Schule des mathematischen Ordnens. Sie kann sich zeitlich über ein ganzes Jahr erstrecken. Wenn man am Ende bis zu einer Axiomatisierung des Winkelbegriffes gelangt, so ist das wie eine Schlussfeier; unbedingt nötig scheint es mir nicht. Auf dem Wege dahin hat sich schon soviel ereignet, dass man zufrieden sein kann.

Ein anderes Beispiel eines brauchbaren (nicht-geometrischen) Axiomensystems ist das der elementaren Masstheorie. Es hat den Vorteil vielseitiger Interpretierbarkeit. Der Schüler kann an vielen Beispielen das axiomatisierende Ordnen üben, ohne dass er immer wieder neue Axiomensysteme zu erfinden braucht.

Will man bei der Geometrie bleiben, so verdient die Stereometrie den Vorzug von der Planimetrie (wenigstens wenn sie, wie in den meisten Programmen, für den Schüler neu ist). Am neuen Stoff lässt sich das Ordnen nämlich eher üben als an einem, den man schon kennt oder zu kennen glaubt.

6. Wenn jemand schon eine Anzahl einfacher Axiomensysteme kennt, kann man es wagen, ihm ein komplizierteres Axiomensystem fix und fertig anzubieten. Man darf hoffen, dass man ihm dann beibringen kann, die Finessen zu würidgen. Das Komplizieren

eines Axiomensystems mit allerlei Finessen ist eine Lieblingsbeschäftigung des erwachesenen Mathematikers. Wo der Schüler sie prinzipiell nicht würdigen kann, ist sie im Unterricht sinnlos. Bei Pickert, S. 6, steht:"Durch die Norm vermeide ich das vorzeitige Benutzen der Anordnung des Skalarbereichs, die sich erst zum Schluss aus den geometrischen Axiomen ergeben soll". Warum "soll"? Eine dumme Fragen, denn jeder erwachsene Mathematiker weiss das. Es gehört sozusagen zur mathematischen Hygiene - so etwas wie das Händewaschen vor dem Essen. Aber wie wollen wir dem Schüler, der noch gar keine axiomatischen Erfahrungen hat, klar machen, warum das "soll". Ja, Pickerts Bemerkung ist nicht für den Schüler bestimmt, wird man sagen. Aber, wenn das einzige Argument, mit dem diese Methode motiviert werden kann, nicht für den Schüler bestimmt ist, wie soll man sie dann dem Schüler gegenüber rechtfertigen? Das Fertig-Auftischen eines Axiomensystems kann so nur zur Kritiklosigkeit erziehen, während wir durch die Mathematik lieber die Kritik schärfen wollen. Siehe auch die Definition des inneren Produktes auf S. 6 - wie soll man dem Schüler gegenüber so etwas rechtfertigen?

In anderer Hinsicht ist Pickerts Axiomatik recht elementar. Die logische Struktur der Axiome ist einfach. Das kann man von Choquets System durchaus nicht sagen. Bei Pickert sind die Subjekte der Axiome Vektoren, Punkte, Geraden, Zahlen oder einfache Relationen wie "a und b sind kongruent", "a und b sind senkrecht" u.s.w. - Bei Choquet treten schon Abbildungen als Subjekte von Axiomen auf - wenn der Begriff der Abbildung woher genügend geübt worden ist, so wird das keine Schwierigkeiten machen. Viel schwieriger steht es mit dem Axiom "auf jeder Geraden gibt es zwei einander entgegengesetzte Ordnungen". Natürlich muss vorher der Ordnungsbegriff axiomatisch eingeführt worden sein. Aber obendrein muss man ihn auch geübt haben. Nun sehe ich absolut kein Übungsmaterial für diesen Begriff, das hier hineinpasst. Wenn man durch jeden Punkt zu jeder Graden eine Parallele fordert, so tut man etwas (auch vom naiven Standpunkt aus) Vernünftiges, denn es gibt durch einen Punkt zu einer Graden auch Nichtparallele; wenn man Senkrechten verlangt, so hat man ja den Hintergrund der Nicht-Senkrechten. Welches ist aber der Hintergrund, vor dem die Ordnungsrelation erscheinen soll? Natürlich sind auf der Graden zwei Ordnungen; was will es dann besagen, dass man ihre Existenz fordern soll? Wie man es besser macht, zeigt Fenchel: je zwei Punkte bestimmen eine Ordnung.

Auch bei Choquet findet man Beispiele von Komplikationen der Methodenreinheit zuliebe, von denen man nicht sieht, wie man sie dem Schüler gegenüber rechtfertigen soll. Man lese auf p. 6: "Chaque droite est munie d'une structure d'ordre et d'une structure algébrique. Pour chaque droite, ces deux structures sont reliées par des axiomes de comptabilité". Diese Trennung beider Strukturen ist dem erwachsenen Mathematiker heutzutage geläufig. Wenn es gelingen könnte, sie dem Schüler irgendwie plausibel zu machen, so wäre etwas sehr Wichtiges erreicht. Choquet tut das aber nicht; er lehnt es in der Einleitung sogar ausdrücklich ab, den reellen Zahlkörper zu umgehen und dem entsprechend verfährt er auch im weiteren Verlauf: die Abstandsfunktion, die er fordert, bildet auf die Menge der positiven reellen Zahlen ab. Damit ist die Trennung in zwei Strukturen pädagogisch sinnlos geworden. So wie sie hier motiviert wird, dient sie nur zur Beschwichtigung des Gewissens des Lehrers.

7. Mehrmals wurde bemerkt: In traditioneller Weise deduktiv betriebene Geometrie ist ja auch Axiomatik, nur eben eine schlechte, bei der man die Axiome verschweigt oder aus dem Zylinderhut holt. Warum es dann nicht gleich ordentlich machen? Ehrlich währt am längsten.

Die Behauptung, dass traditionelle Deduktivität und Axiomatik sich im Grunde nicht unterscheiden, ist erstens richtig und zweitens falsch. Richtig, insofern als die Ansprüche des Axiomatikers, dass er nichts verschweige und ohne Zylinderhut arbeite, ungerechtfertigt sind. In der Axiomatik, wie wir sie seit Pasch und Hilbert kennen, wird die Syntax und Semantik der Gemeinsprache ohne weiteres als bekannt vorausgesetzt. Man definiert "deux droites ... sont <u>parallèles</u> ..." (Adjektiv) und macht dann eine Aussage über "... une <u>parallèle</u> ..." (Substantiv), und man projiziert "<u>parallèlement</u>" (Adverb). Man definiert "droites ... sécantes", aber gebraucht immerzu "rencontrant". Natürlich ist das auf diesem Niveau völlig gerechtfertigt. Es gibt aber eben auch andere Niveaus. Man kann auch an der weitgehenden Unverbindlichkeit der Sprache Anstoss nehmen und die Axiome und andere Aussagen sprachlich formalisieren. Für solch ein Formalisieren gibt es auch wieder verschiedene Niveaus; und auf einem sehr hohen kann man schliesslich auf noch die Deduktion formalisieren. Die Axiomatisierung ist also keineswegs der Gipfel; es gibt Niveaus unter und über ihr. Mit der Axiomatik hat man die absolute Ehrlichkeit nicht in Pacht. Es gibt zu jedem Niveau die ihm entsprechende Ehrlichkeit und Exaktheit. Die zu einem gewissen Niveau gehörige Ehrlichkeit und Exaktheit kann man vom Schüler nicht erzwingen, wenn er sich nicht auf diesem Niveau befindet. Wohl wird das immer wieder versucht. Natürlich mit Scheinerfolgen. Geometrische Axiomatik ist in der Hinsicht besonders gefährlich. Es ist so leicht und so verfänglich, da allerlei einzubauen, was einem höheren Niveau entspricht; der Verfasser des Systems rechnet darauf, dass es dank der axiomatischen Methode automatisch funktioniere, das heisst, ohne dass der Schüler es versteht. Ich weiss, dass in unserem Unterricht vieles so beschaffen ist, aber einsichtige Pädagogen wollen davon gerade loskommen. Mit der Axiomatik droht die Gefahr, dass man nocht tiefer hineingerät.

Vom didaktischen Standpunkt gibt es - meine ich - wohl einen grossen Unterschied zwischen Axiomatik und traditioneller Deduktivität. Ich habe diesen Unterschied vorhin schon angedeutet mit den Worten: "global ordnen" und "lokal ordnen". Jeder weiss, dass es recht lange dauert, bis der durchschnittliche Schüler einen Beweis als ganzes übersehen lernt. Über einen speziellen Satz hinaus die Zusammenhänge mit anderen Sätzen zu übersehen, ist etwas, das noch länger dauert. Wenn er gerade mit Mühe und Not dieses Niveau erreicht hat, will man ihm schon wieder das nächste, das des global Ordnens, aufdrängen (denn ein Aufdrängen ist es sicher, wenn man sich nicht davon überzeugt, ob der Schüler soweit ist, und ihm das Axiomensystem vorsetzt). Es kommt nocht etwas anderes hinzu. Der Schüler hat im Laufe der Zeit zwei Arten des Definierens kennen gelernt, die beschreibende Definition, bei der man einen bekannten Gegenstand festlegt, indem man einige bezeichnende Eigenschaften an ihm abliest, und die algoritmisch konstruktive, schöpferische Definition, die aus bekannten Gegenständen neue erzeugt. Die implizite Definition durch Axiome, die ja in der modernen Mathematik eine so grosse Rolle spielt, ist beschreibend und doch schöpferisch, wenn auch nicht algoritmisch. Auch durch diesen sachlich und didaktisch neuen Tatbestand unterscheidet die axiomatische Methode sich von der traditionell deduktiven. Bei der traditionell deduktiven Methode ordnet man lokal, bis zu einen unsicheren, verschwimmenden Horizont. Bei der axiomatischen Methode legt man den Horizont fest, oder man bildet sich wenigstens ein, dass man das könnte und tue. Ich habe schon auseinandergesetzt, dass das ein recht unkritischer Anspruch ist.

8. Ich frage mich übrigens, ob man sich bei der Erneuerung des Mathematikunterrichts nicht eher das Ziel einer Formalisierung als das der Axiomatisierung stellen sollte. Es ist übrigens auffällig, dass unter den vorgeschlagenen Methoden die in axiomatischer Hinsicht anspruchloseste zugleich die am stärksten formalisierte ist (ich meine die von Fenchel). Wenn man seine Aufmerksamkeit zu sehr auf die Finessen des Axiomatisierens richtet, wird man geneigt sein, im Sprachlichen mit derselben Unverbindlichkeit weiter zu trotten, die man aus dem voraxiomatischen Stadium gewöhnt ist.

Es scheint mir unzweifelhaft, dass keine mathematische Jugend so des Transfers fähig ist, wie das Formalisieren. Obendrein hat das Formalisieren den Vorzug, dass es auch lokal geübt werden kann und sich wegen der Beschränktheit der mathematisch-sprachlichen Mittel dabei doch global auswirken kann. Es liegt im Wesen der geometrisch-axiomatischen Methoden, dass bei ihnen der Wortschwall besonders gepflegt wird. Damit wirken sie einer Formalisierung im Sprachlichen eher entgegen. Ich möchte diese Kontroverse "Axiomatisierung-Formalisierung" einmal zur Diskussion stellen. Sollte man sich nicht mit grösserem Nachdruck dem zweiten Ziele zuwenden?

9. Noch eine kleine Bemerkung: Bei aller Mathematik, die man unterrichtet, soll man im Algoritmischen keine unnötigen Probleme erschaffen. Ich bemerke das im Hinblich auf die unnötige Schreibweise P^a statt P + a für den Endpunkt des zum Punkte P verpflanzten Vektors a (bei Pickert), auf das Rechtsschreiben des Skalars (bei Pickert) und auf die unnötige und komplizierende Verwendung zweidimensionaler Matrices statt komplexer Zahlen (bei Dieudonné).

H. Freudenthal
Utrecht, Holland.

Remarques relatives á la modernisation de l'enseignement des mathématiques élémentaires.

Pendant le séminaire de la C.I.E.M., tenu à l'Université d'Aarhus, du 30 mai au 2 juin 1960, la plupart des exposés et des discussions ont porté sur des présentations axiomatiques de la géométrie élémentaire aux élèves du cycle supérieur de l'enseignement secondaire.

D'une maniére générale, l'accord de principe semble acquis quant à l'intégrêt et, sans doute, la nécessité d'améliorer l'ensiegnement mathématique en le modernisant par l'introduction des structures fondamentales. Sur la base de ces dernières, on veut donner aux mathématiques élémentaires plus de cohérence, plus d'unité et plus d'efficacité et on espère en rendre l'acquisition plus économique et plus aisée.

Dans la reconstruction des mathématiques élémentaires selon des lignes modernes, les mathématiciens mettent, le plus souvent, l'accent sur le stade ultime de l'élaboration des mathématiques: leur édification déductive à partir d'un système d'axiomes.

A notre époque, il me semble que la notion d'un exposé axiomatique comme forme d'organisation logique d'une théorie abstraite, capable d'interprétations multivalentes dans des modèles variés, est, non seulement souhaitable pour les étudiants qui abordent les études de mathématiques supérieures: elle fait partie de la formation générale que doivent proposer les humanités d'aujourd'hui.

Cependant, pas plus que les exposés axiomatiques ne constitue la totalité de la mathématique vivante, qu'elle soit pure ou appliquée, ils ne doivent prendre, dans l'enseignement secondaire, une place prépondérante et l'envahir d'une perfection sclérosante.

Le premier objectif de l'enseignement doit être l'acquisition active de faits mathématiques, l'apprentissage personnel de démarches mathématisantes et leur mise en oeuvre efficace.

La capacité de construire des schémas adéquats, l'habileté à traiter une question par voie mathématique, l'entraînement à effectuer avec aisance et sûreté des calculs de toutes natures sont tous aussi importants que l'activité logicisante qui définit et démontre.

Faute d'offrir aux adolescents un aliment mathématique suffisament varié pour être attrayant, nous risquons de détourner de bons esprits des mathématiques et de donner de celles-ci une idée fausse parce que partielle et tronquée.

La partie des mathématiques traditionnelles qui subit le plus les assauts et les sarcasmes des novateurs est la géométrie scolaire. Cette géométrie, dite euclidienne, parce qu'elle est issue des Eléments d'Euclide plus ou moins dénaturés, a été gonflée de compléments divers qui fournissent aux examens et aux examinateurs une matière de prédilection.

Qu'il faille secouer le vieil arbre et casser les rameaux morts ne peut être mis en doute. Est-il nécessaire pour autant de devenir allergique aux triangles, voire aux angles et de les extirper de l'ensiegnement? Nous ne le pensons pas.

Ce qui nous paraît urgent et indispensable, est de mettre un terme à la prolifération d'une géométrie d'examens et de concours, pour faire une juste part à diverses géométries dans une édification unitaire des mathématiques à laquelle le moment est venu de collaborer.

Pour permettre pareille synthèse, il faudra, en avant des notions d'arithmétique et de géométrie, familiariser les élèves avec des éléments relatifs aux ensembles, aux relations et aux structures-méres.

Les abords de l'arithmétique et de la géométrie traditionnelles sont malaisés parce qu'on veut, sans préparation, ouvrir l'accès à des structures nombreuses et complexes.

S'il convient de souligner que la géométrie est une forme pour divers aspects de la physique (le segment rectiligne correspond, tour à tour, au fil tendu, à l'arête d'une règle à une ligne de visée, à l'axe de révolution d'un solide, à un fil à plomb ou la trace d'une particule élémentaire), il est indispensable de lui donner plus de virtualité en montrant, par example, l'usage des points et des segments dans les structures d'ordre présentées par les canevas de voies de communications, les arbres généalogiques, les organigrammes, les schémas de montage et les plans de déductions.

De même, en ce qui concerne l'activité calculatrice et symbolique, on ne peu plus la borner aux opérations numériques traditionnelles. Il importe de donner aussi à la démarche algébrique sa multivalence.

De la sorte, la mathématique même élémentaire apparaîtra comme science des structures et préparera mieux les esprits à retrouver la permanence de celles-ci dans des situations ou des phénomènes disparates.

D'un autre côté, avant de proposer une organisation déductive axiomatisée, il faut apprendre, sur des exemples simples, à déduire d'une hypothèse, des conséquences qu'elle implique et à réduire une notion à d'autres qui la définissent. L'initiation à la démonstration est délicate: elle se borne souvent à proposer des déductions toutes faites qui sont apprises et répétées. Un progrès pourrait venir de l'usage des notions ensemblistes et d'une prise de conscience explicite et aussi précoce que possible des opérations, relations et quantificateurs logiques.

Pour ce qui concerne la présentation systématique de la géométrie dans le cycle supérieur, la solution la plus valable me semble celle basée sur un espace vectoriel muni d'un produit scalaire.

Les avantages de cette présentation sont multiples.

Une telle organisation est assurée d'être assez uniforme pour tous les élèves. Elle réalise donc une sorte de fond commun analogue à celui de l'exposé traditionnel. Des axiomatiques plus originales risqueraient d'avoir moins de diffusion sociale et, partant, de ne pas fournir un domaine commun dans la formation des élèves.

De plus, on pourrait séparer la géométrie affine de la métrique et, si on le juge utile, introduire la géométrie projective à partir des vecteurs.

La notion d'espace vectoriel est une synthèse qui fait intervenir les notions de groupe et de corps dont elle motive l'intérêt. L'intuition géométrique et la calcul y seraient associés et l'introduction des nombres complexes serait simplifiée puisqu'il s'agirait de considérer un vectoriel à deux dimensions muni d'une multiplications. L'isomorphisme du champ et du plan complexes serait immédiat.

De plus, on pourrait donner de la notion d'espace vectoriel des exemples qui ne se bornent pas aux flèches de la géométrie et, notamment, parler de l'espace vectoriel des polynômes, de celui des fonctions, ou de l'espace des solutions d'un système linéaire homogène et y associer matrices et déterminants.

Quant à l'intérêt pratique des notions de vecteurs, il est trop évident pour la physique, même élémentaire.

On peut considérer que l'étude des espaces vectoriels à un nombre fini de dimensions est un objectif capital de l'enseignement mathématique secondaire.

Enfin, les mathématiques élémentaires rénovées que beaucoups souhaitent ne pourront être assimilées en profondeur que grâce à des batteries d'exercices, pratiques autant que théoriques, assez variés pour renouveler l'intérêt et motiver l'effort et gradués de telle façon, que, sans tomber dans la mécanisation du drill routinier, ils assurent une progression des étudiants vers un épanouissement de leur compréhension des mathématiques.

L'enseignement traditionnel, qui, nous ayant tous formés ou déformés, est l'objet de tant de nos critiques a pour lui, un arsenal, démodé pensons-nous, de moyens didactiques.

Pour le supplanter, un enseignement modernisé devra disposer d'applications, d'exercices et de problèmes adaptés aux élèves.

Elaborer ces ressources est la tâche la plus urgente. Pour la mener à bien, les professeurs de l'enseignement secondaire devront compter sur l'aide, tant des mathématiciens que des divers usagers des mathématiques.

W. Servais
Morlanwelz, Belgique.

Eine Bemerkung zum axiomatischen Unterricht in der Mittelschule.

Es wurden verschiedene interessante Wege des axiomatischen Aufbaus der Geometrie im Mittelschulunterricht zwischen dem 15-ten und 19-ten Lebensjahr vorgeschlagen; vielleicht wäre es jedoch zweckmässig, auch die Möglichkeiten und den Weg der Ausführung der axiomatischen Behandlung einer Frage in der Mittelschule zu untersuchen. Meiner Ansicht nach interessiert den Schüler - sogar den intelligenten - eine axiomatische Betrachtung an und für sich nicht, auch jene nur selten, die besonderes mathematisches Interesse aufweisen. Will man durch den axiomatischen Aufbau einer Disziplin wie die Geometrie den Bruch zwischen Mittelschule und Hochschule beheben, so droht das mit einem noch grösseren Bruch innerhalb des Mittelschulunterrichts.

Die Aufstellung eines Axiomensystems kann verschiedene Gründe haben. Euklid wollte dadurch die aus der Anschauung angenommenen Tatsachen möglichst einschränken und evident machen. Das wurde für die moderne Grundlagenforschung besonders wichtig, da der Weg zur Untersuchung der Widerspruchslosigkeit einer Disziplin erst dadurch frei wird. Umfang und Grenzen einer Disziplin werden erst durch ihre Axiomatisierung exakt festgelegt.

Ein Axiomensystem kann als eine implizite Definition der darin vorkommenden Grundbegriffe betrachtet werden, und das führte zu einer andersartigen Anwendung der Axiomensysteme in der Mathematik. Die aus einem Axiomensystem ableitbaren Sätze gelten in einem beliebigen Modell, wo die Axiome bei geeigneter Interpretation der Grundbegriffe gültig sind. So kann man z.B. die Sätze der Gruppentheorie auf Restklassen, Idealklassen, geometrische und topologische Transformationen und viele andere konkrete Gruppen anwenden, ohne sie in den einzelnen Zweigen der Mathematik für verschiedene Arten von "Elementen" und "Operation", aber mit gleichem Gedankengang zu beweisen.

Für die Grundlagenfragen werden sich nur einige fortgeschrittene Studenten interessieren. Der erste und besonders der letzte Aspekt der Axiomatik kann, glaube ich, den Schülern nahe gebracht werden, auch dazu ist jedoch viele Mühe und Umsicht erforderlich.

Die wichtigste Aufgabe in dieser Hinsicht ist also meiner Anschauung nach den Schülern dazu zu verhelfen, einen Teil der Mathematik /wenn auch einen noch so winzigen/ zu axiomatisieren. D.h. die Schüler sollen /von dem Lehrer geführt/ entdecken, dass gewisse früher ohne Beweis angenommene Tatsachen aus anderen beweisbar sind, oder dass man einfache, anschaulich klare Tatsachen finden kann, aus denen mehrere andere - nicht so sehr einfache - die man aber früher angenommen hat - schon folgen, u.s.w. Andererseits kann man einige analoge Beweise in verschiedenen Teilen des Mittelschulunterrichts vorbereiten, die später gesammelt werden können und aus denen man Begriffe wie Ordnung, Vektorraum oder andere abstrahieren und axiomatisieren kann.

Inzwischen wird man natürlich einige kleine Gebiete axiomatisch aufbauen, es wird aber hoffentlich der Grund und Ziel davon ein wenig klarer sein, als wenn man gleich eine axiomatisierte Disziplin fertig vorschlägt. Ob sich die Geometrie am besten zu einer axiomatischen Behandlung /im eben angeführten Sinne/ eignet, sollte noch näher untersucht werden.

János Surányi
Budapest, Hungary.

My Opinions Concerning the Problems Discussed at the ICMI - Seminar in Aarhus May 30 to June 2, 1960.

At the Seminar I got the impression that the teachers in mathematics at the universities essentially agree upon the parts of modern mathematics which they would like to introduce in secondary schools. I can accept that efforts are made to introduce the fundamental conceptions of sets in the teaching of mathematics in secondary schools, and I also think that it will be valuable to teach geometry in a more precise way at the higher levels of the secondary school. But I do not think that the average pupil at this stage has reached such a degree of maturity that a pure axiomatic introduction of geometry in any of the forms presented at the Seminar could be undertaken in such a way that the average pupil would be able to keep his interest during the instruction.
On the other hand, I think it will be of very great value to make use of these axiomatic structures in the education of the teachers of the secondary schools.

The gap between the teaching of mathematics on the highest level of the secondary school and the introductory teaching of mathematics at the university has been used as an argument for the need to introduce more modern topics in the curriculum of the secondary schools. In my opinion this argument is only of little value. It must always be the task of the teachers at the university to base their instruction upon the qualifications, which the students have got in the secondary school. But of course it must be admitted that introduction of new topics in the teaching of mathematics at secondary schools will adjust the pupils better to the advanced study of mathematics. However, I think it is a great mistake to base the argumentation for renewals in the school mathematics solely upon the need for a better preparation of the relatively few students who want to study mathematics at the university. If the instruction has been of little value mathematically, the teachers at the university have got the chance to make it good. Such an opportunity to repair the damages of a bad school education in mathematics will not be given to the main part of the students who do not continue their mathematical studies at the university. Some of them will have to use the mathematics, they have learnt in the school, when they are studying other subjects, and for these students it will be a great handicap in their studies, if the school instruction of mathematics has been of too little value.

Therefore, I think it is very important to make it quite clear that the renewal of the instruction of school mathematics must take place in such a way that the students who leave the secondary schools have not only got a good understanding of mathematical thinking, but are also able to handle different kinds of problems in a mathematical way.

I really think that the development not only in pure mathematics but also in several other subjects require a renewal of the schoolmathematics, but alterations must in my opinion be made with great care. We must not forget that the traditionel teaching of mathematics in the secondary schools has been able to interest a reasonable part of the pupils in the study of mathematics and other subjects, in which mathematics play an important part. Before introducing a new subject in schoolmathematics it is therefore of great importance to test if it is possible to represent the subject in such a way that it will keep up the interest of the average pupil.

Poul Thomsen
Copenhagen, Denmark.

De l'opportunité d'une modernisation radicale et profonde des méthodes d'enseignement des mathématiques, on ne saurait douter. De facon particulière, en ce qui concerne l'enseignement rationnel de la géométrie, nul doute que la voie maîtresse tracée par le modèle euclidien doit être abandonnée. Un programme didactique semblable pose toutefois des problèmes très difficiles à résoudre, beaucoup plus de nature pédagogique ou psychologique, à mon avis, que de nature proprement mathématique.

Nous avons entendu les exposés de MM. CHOQUET, PICKERT et FENCHEL, tous fort intéressants et au plus haut niveau scientifique. Mais le gros problème, comme l'a remarquablement signalé M. FREUDENTHAL, est le suivant "Comment réussir à convaincre les élèves de l'utilité de l'axiomatisation de la géométrie?"

Tout le monde est convaincu, depuis le temps de KLEIN et peut-être même avant, qu'EUCLIDE n'a pas écrit ses "Eléments" dans un but didactique. Néanmoins, à la question: "Pourquoi le modèle euclidien a-t-il été maintenu jusqu'à aujourd'hui dans l'enseignement?" il ne me semble pas que l'on ait donné encore une réponse entièrement satisfaisante. J'estime qu'il serait très utile de faire des recherches historiques vraiment approfondies à ce sujet.

M. CHOQUET nous a montré de quelle facon on peut édifier la géométrie rationnelle en négligeant les triangles. Il a dit qu'il faut freiner le goût pervers qui entraîne vers les points remarquables du triangle, et vers des relations métriques parfois élégantes mais inutiles. Mais il a dit aussi, et à bon droit, que les élèves de 15 à 16 ans trouvent souvent faciles et intéressants certains concepts et certaines méthodes que leurs enseignants eux-mêmes jugent difficiles et peu intéressants: les élèves sont souvent portés, oserais-je dire, non pas vers l'abstrait mais vers le compliqué. C'est une donnée psychologique que l'on ne doit absolument pas négliger, car, à chaque âge, correspond une réalité psychologique propre, un propre "niveau psychologique" (SERVAIS), dont il faut tenir grandement compte dans l'enseignement.

Les calculs en systèmes de numération différents du décimal sont compliqués et inutiles, même s'ils sont élégants; et pourtant les élèves bien souvent les trouvent intéressants et faciles

(CHOQUET). Il ne me semble pas qu'il vaille la peine de contrarier les élèves dans cette disposition. Et s'ils trouvent intéressantes et faciles les propriétés des triangles et de leurs points remarquables, même si ces propriétés nous paraissent compliquées et inutiles, pourquoi devrions-nous les leur cacher?

Ce n'est que ce qui est prestigieux pour les élèves qui a une valeur pédagogique.

Je n'ai pas l'intention de défendre EUCLIDE: j'affirme uniquement que la substitution de la méthode euclidienne par d'autres méthodes entraîne des difficultés de caractère pédagogique - je le répète - beaucoup plus grandes qu'on ne le croit habituellement. La difficulté majeure est la suivante: <u>élever l'esprit de l'élève au dessus du concret</u>. Or, la méthode euclidienne semble avoir au moins un mérite pédagogique: celui de suivre une voie intermédiaire assez bonne, entre le concret et l'abstrait. Des concepts entièrement nouveaux ne peuvent exercer un charme sur l'élève, si celui-ci n'en sent pas intimément le besoin. Déjà FREUDENTHAL a fait une remarque subtile lorsqu'il dit qu'en général un élève de 15 à 16 ans ne sent pas le besoin de certains axiomes, tels que ceux de l'ordre des points d'une droite. Je me permets de généraliser et d'accentuer cette remarque: en général, l'élève ressent de l'antypathie pour les systèmes hypothético-déductifs.

Ne nous préoccupons pas trop, comme le fait M. DIEUDONNE', de l'exactitude parfaite de notre exposition. On n'apprend pas les mathématiques autrement que n'importe quelle autre discipline. Et la règle, très simple, est celle que tous les pédagogistes concordément suggèrent: <u>on apprend en faisant</u>. Il faut que l'élève <u>fasse</u> des mathématiques, de n'importe quelle facon. D'abord, il les fera peu correctement, avec plus ou moins de fautes: mais le maître devra tout de même l'encourager. L'unique chose vraiment importante (et certes extrèmement importante), c'est que le maître soit une personne cultivée et qu'il <u>pense</u> le plus correctement possible. N'oublions pas que la pensée va au delà des mots et que l'élève est bien souvent plus sensible à ce que le professeur ne dit pas qu'à ce qu'il dit. C'est alors, et alors seulement, que l'étude, au début désordonnée et confiée surtout aux capacités intuitives de l'élève, variée et ouverte cependant, se disciplinera petit à petit et s'organisera, dans le dynanisme intérieur, et pourra atteindre, par degrés, les niveaux les plus élevés de l'abstraction.

T. Viola,

Torino, Italy.