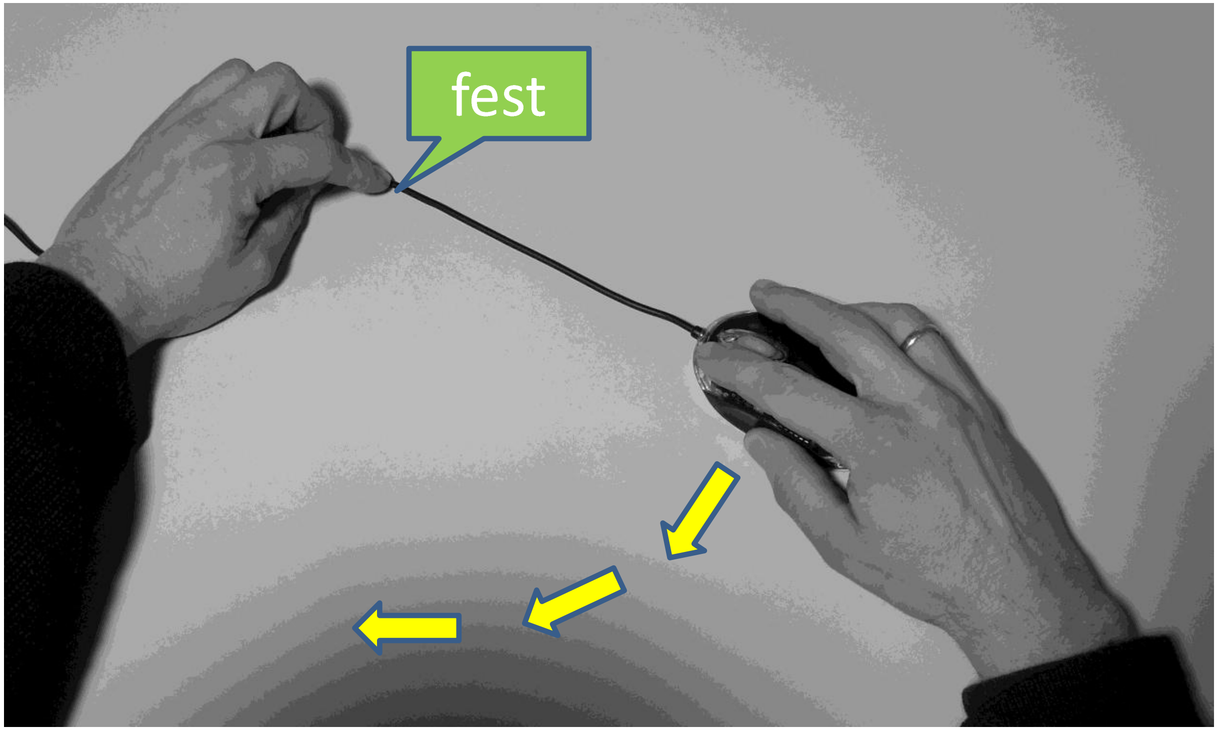
Experimente in der Mathematik – mit Beispielen aus der Analysis

Reinhard Oldenburg, Berlin 19.9.2013, 17:00-17:45

Experiment Nr. 1

- Zeichenprogramm starten, Maus als Zirkel benutzen, welche Linie entsteht am Bildschirm?



Experiment Nr. 1

- Experimente können …
  - Verblüffung erzeugen, Interesse wecken
  - Erklärungsbedürfnis wecken
- Aber auch:
  - Erklärungen geben
  - Begriffe und Hypothesen nahe legen
- Vor allem: Experimentieren ist der Prototyp einer Kompetenz-förderlichen Handlungssituation

Kompetenzen

- Kompetenzen laut MA-Bildungsstandards
  - (K 1) Mathematisch argumentieren
  - (K 2) Probleme mathematisch lösen
  - (K 3) Mathematisch modellieren
  - (K 4) Mathematische Darstellungen verwenden
  - (K 5) Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen
  - (K 6) Kommunizieren
- Ist das zu viel? (Ist etwas gedoppelt?)
- Fehlt da nicht was?
  - Planen (von Abläufen, Prozessen,…)
  - Systeme und Prozesse analysieren
  - Vernetzen / Beziehungen herstellen
  - Bewerten
- Für die Naturwissenschaften sind diese Kompetenzen selbstverständlich (Physik: Fachwissen, Erkenntnisgewinnung, Kommunikation, Bewertung)
- Für Mathe lassen sie sich notfalls auch bei K1-K6 mitdenken, trotzdem ist es sinnvoll, diese pointierter auszubringen

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

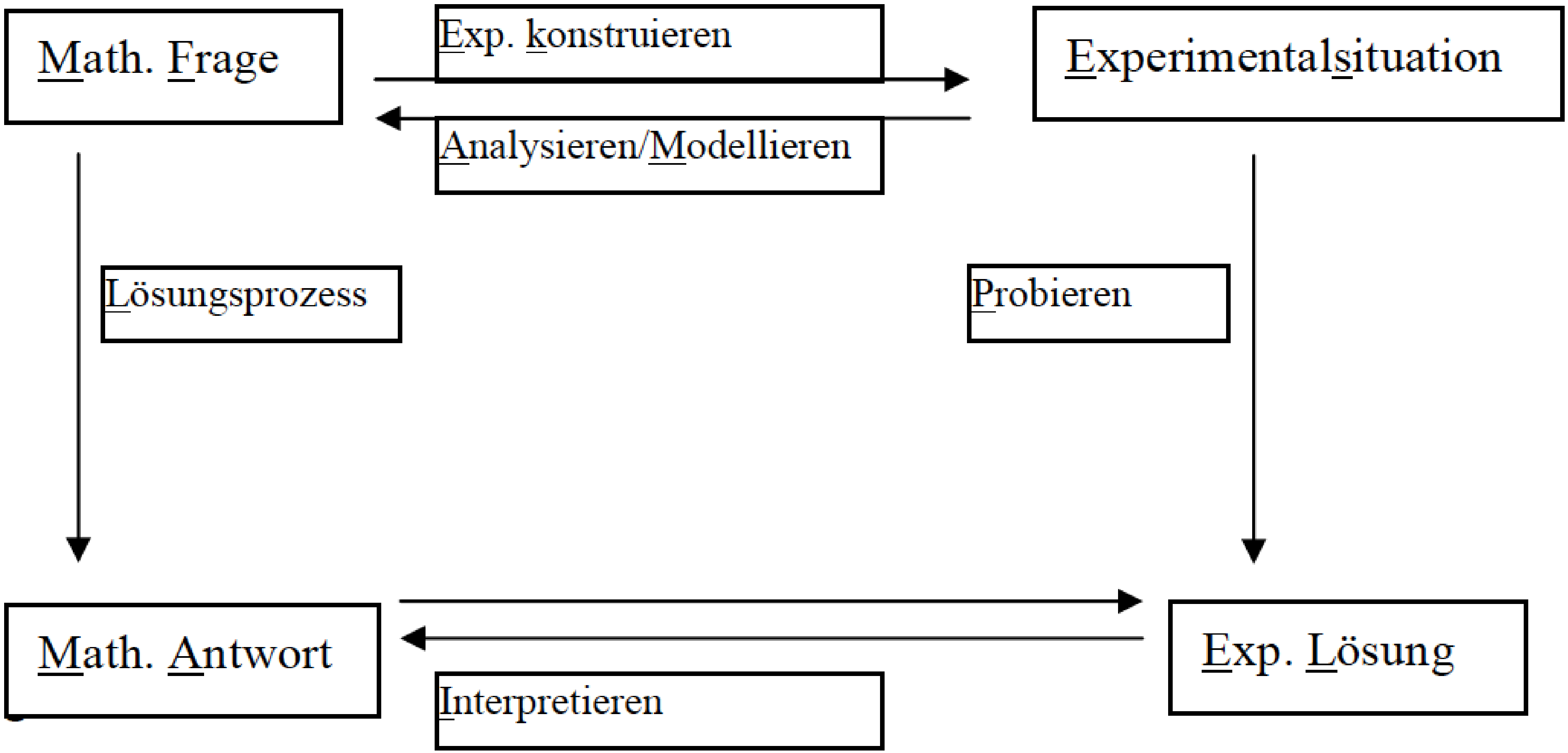
Mathematik = Wissenschaft von Strukturen und ihren Veränderungen

Warum Experimente?

- Experimente sind prototypische Handlungssituationen mit Kompetenzanforderungen
  - Planung des Experiments
  - Durchführung
  - Auswertung / Analyse
  - Schlussfolgerung / Vernetzung der Erkenntnis
- Experimente sind eine charakteristische Methode für alle MINT-Fächer
  - Auch für die Mathematik!

Der Experimentbegriff

- *Ein Experiment ist durch Hypothesen geleitetes, planvolles und kontrolliertes Handeln mit Objekten zum Zweck der Erkenntnisgewinnung durch Beobachtung. (Ludwig&Oldenburg 2007)*
- *Experimentkreislauf (Leuders, Ludwig & Oldenburg 2008)*



Experimente und Kompetenzen

- Verschiede Arten von Experimente
- Daten gewinnen – beschreiben : Modellieren
  - Häufig: Naturgesetz
- Verhalten entdecken – erklären : Argumentieren
  - Häufig: gesetzte Regeln
- Frage entscheiden : Planen und Begründen
- Experimentieren mit einer Simulation : Mathematische Darstellungen und Vernetzen

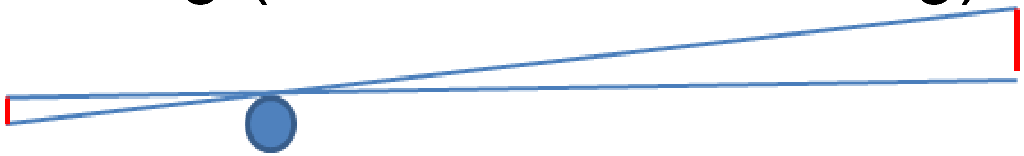
Experiment 1: Ergebnis

- Phänomen: Linearisierung
- Erklärung:
  - Maus bestimmt Position sehr oft (>10 mal pro Sekunde)
  - Kleines Bewegungsstück ist nahezu linear
  - Die Maus sieht deswegen nur eine Bewegung in einer Dimension
- Lokale Linearisierung
- Gibt es das sonst noch?

Lokale Linearisierung

- Wieso funktioniert ein Wipp-Schleuder so gut?

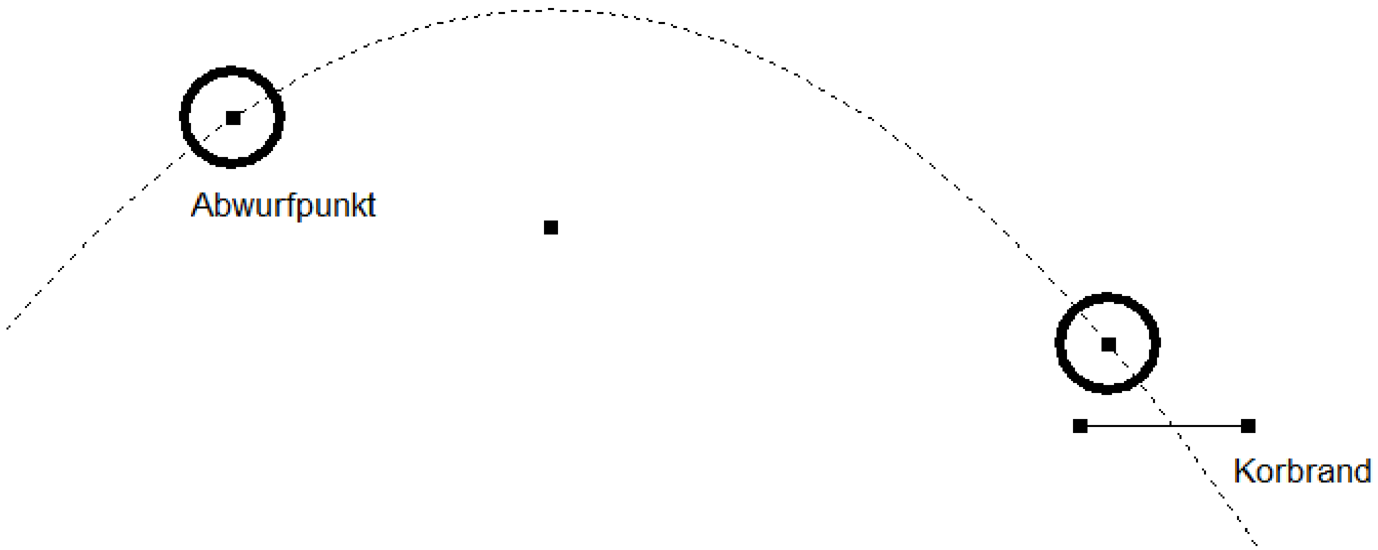
- Modellierung (lokale Linearisierung)



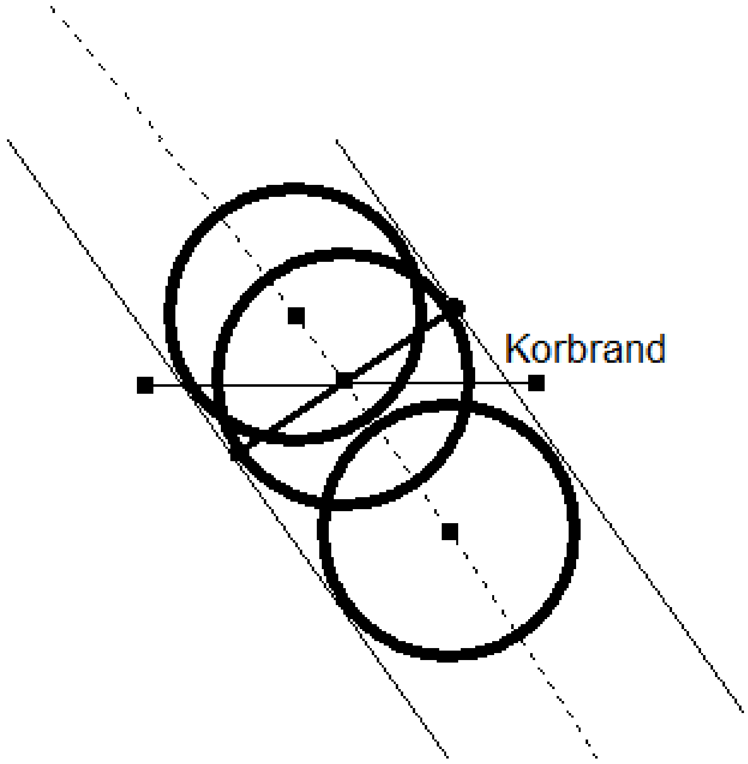
- Berechnung: Strahlensatz

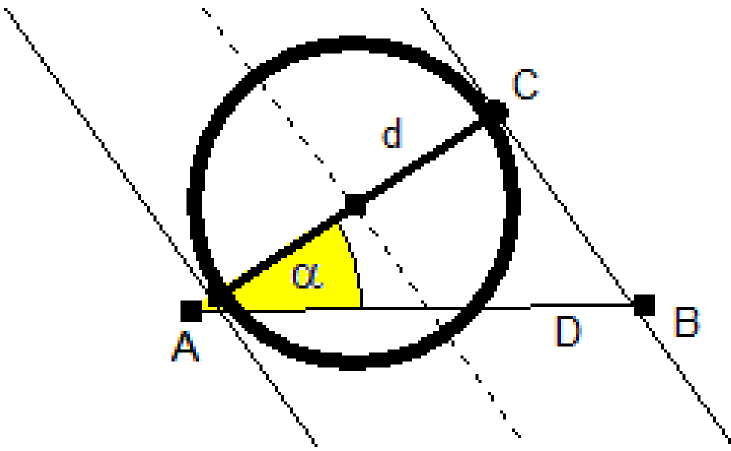
Lokale Linearisierung

- Wie muss der Basketball fliegen? [Weigand, Ludwig, ...]



Lokale Linearisierung





Lokale Linearisierung

- Einsatz dieser Experimente z.B. …
- In der Sek I als Propädeutik der Analysis
- Nach der Einführung der Differentialrechnung zur Vernetzung
- Für den Einstieg in die Differentialrechnung schlage ich dagegen vor:

Ein experimenteller Zugang zur Ableitung

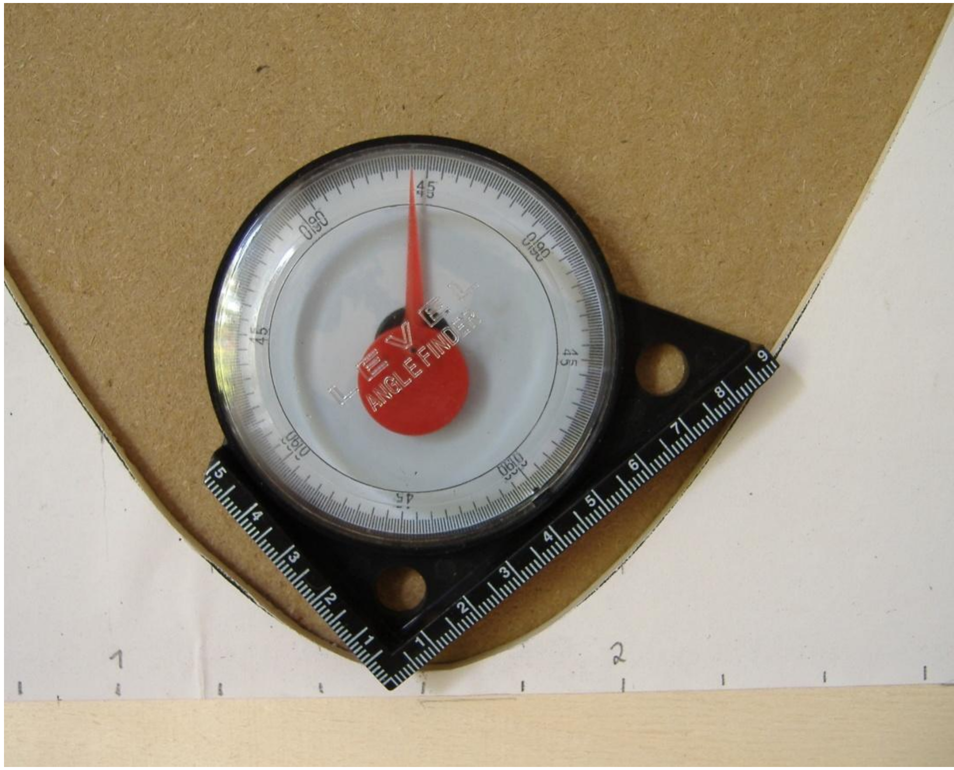
GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

- Analysisunterricht vermittelt zu oft nur den Kalkül, ohne Bedeutung und Sinn
- Experimente zur Ableitung sollen verschiedene Grundvorstellungen (Tangente, Änderungsrate, lineare Approximation) vernetzen
- *Lernen an Stationen,* erprobt in Klasse 11(G9)

Station 1: Steigungsmessung an Schablonen

Arbeitsaufträge

- Steigung an Funktionsgraf-modellen an verschiedenen Stellen möglichst **genau** messen
- Konvexen Abschnitt [Tangente] oder konkaven Abschnitt [Sekante] verwenden?
- Wahl von kurzer oder langer Sekante?
- Berechnung aus Funktionsgraph?



Grundvorstellungen

- Mittlere und punktuelle Steigung
- Sekante/Tangente
- Differenzenquotient

Station 2: Murmelrollbahn

Arbeitsaufträge

- Legostein so positionieren, dass er getroffen wird
- Berechnung aus Funktionsgraph?
- Für zweite Murmelbahn mit bekanntem Funktionsgraph: Berechnungsstrategie notwendig

Appletversion

Botschaft: Ableitung = bestmögliche lineare Prognose einer Änderung

- Vhl Stochastik: W'keit
- Vgl Physik: Δp

Grundvorstellungen

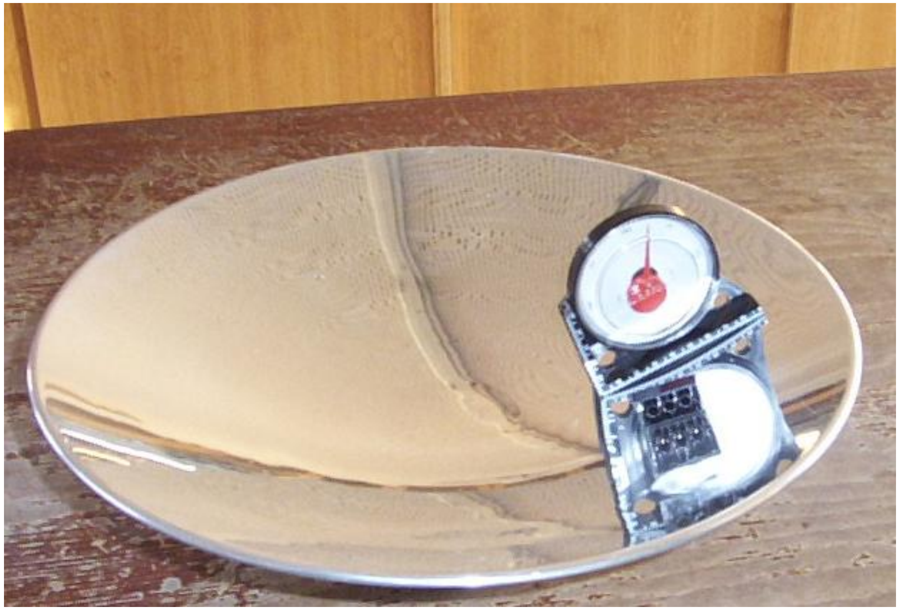
- Lineare Approximation
- Approximation durch Differenzenquotienten

Station 3: Rutschen im Parabolspiegel

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

Arbeitsaufträge

- Bestimmung des Winkel, ab dem ein Legostein auf einer schrägen Glasplatte rutscht
- Vorhersage der Stelle, ab der der Stein im Parabolspiegel rutscht

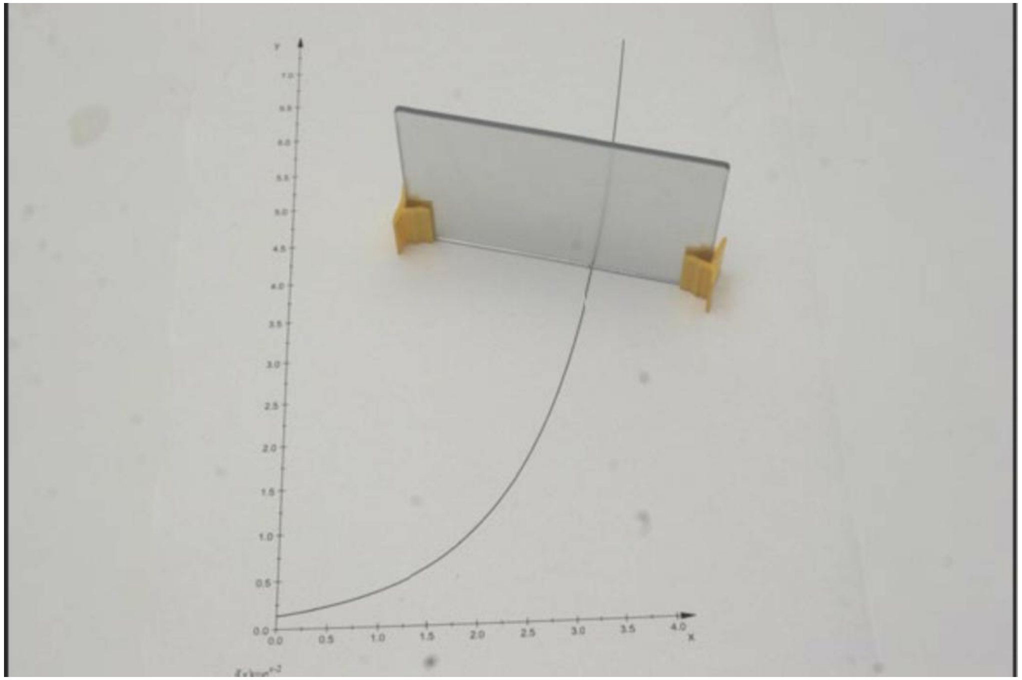


Grundvorstellungen

- Mittlere Steigung
- Differenzenquotient
- Sekante/Tangente

Station 4: Spiegelkonstruktion

- Spiegelkonstruktion der Normalen
- Isoliert wäre dies kontraproduktiv, da nur auf einen Punkt fokussiert
- Im Kontext: Graph sieht lokal fast gerade aus
- Nachteil: Kein Hinweis auf Berechnung

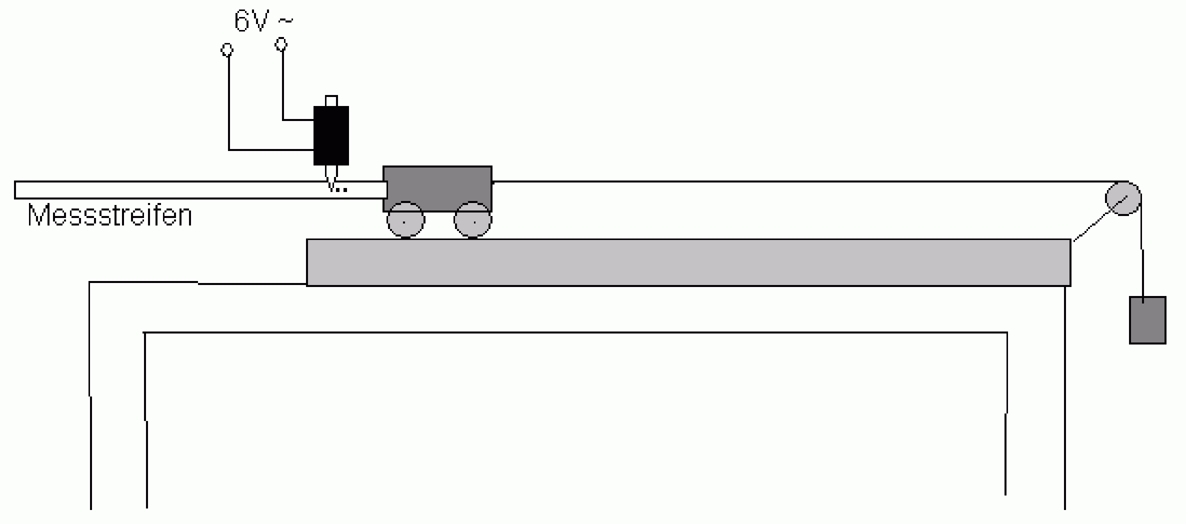


Grundvorstellungen

- Lokale Richtung/Geradlinikeit

Station 5: Physikunterricht

- Im Physikunterricht: Geschwindigkeit eines beschleunigten Wagens messen
- Ergebnis ist eine Tabelle aus t- und x-Werten
- Methodische Alternativen:
  - Videoanalyse
  - Bewegungsanalyse mit Ultraschallsensor

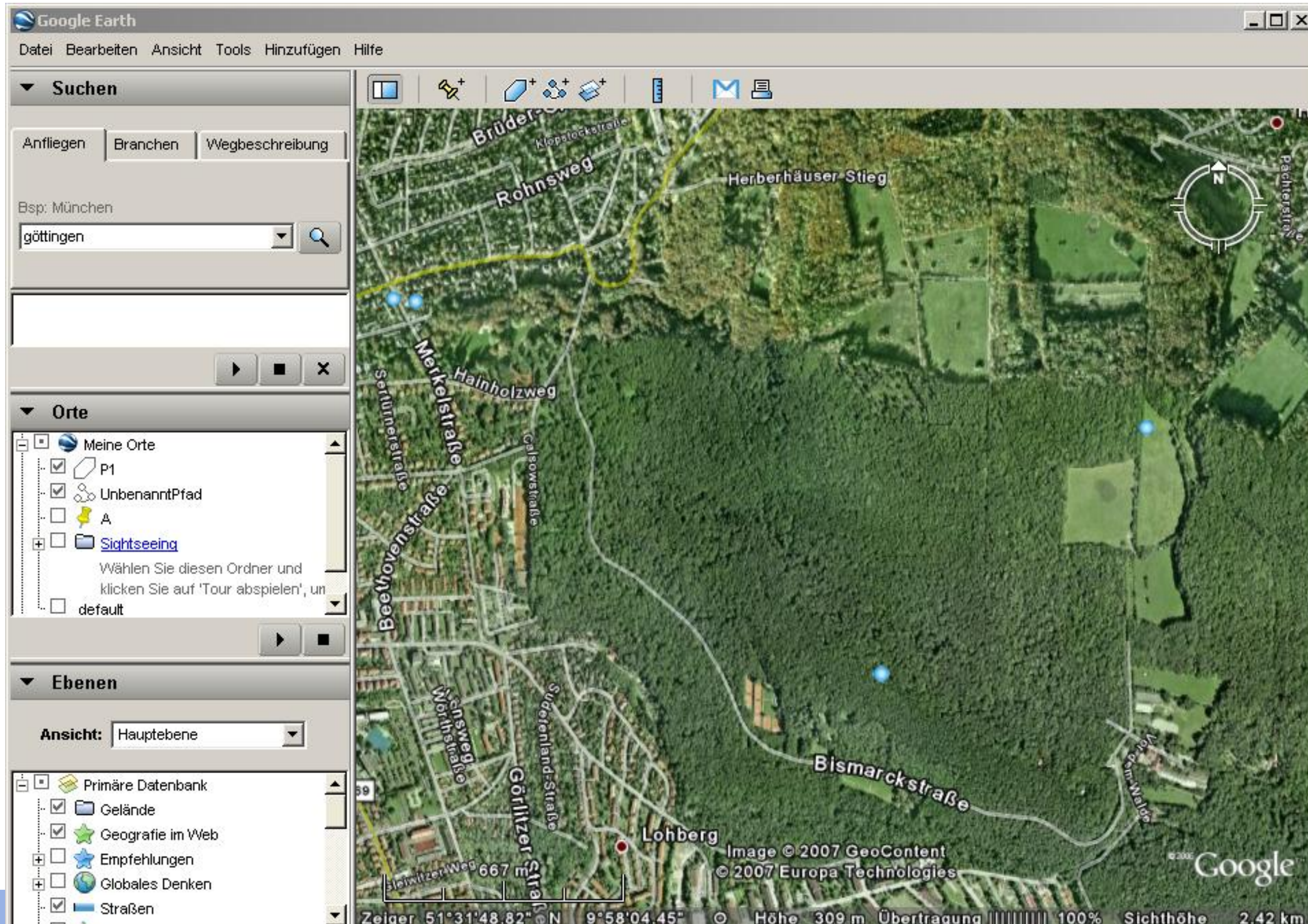


Grundvorstellung:

- Differenzenquotient

Ideen für weitere Stationen

Geländesteigung aus Höhenangaben ermitteln
Vorteil: Anders als bei Profilbildern sieht man nichts, ohne zu rechnen
Grundvorstellung: Differenzenquotient (Richtungsableitung)



Impressionen

Experiment zur Linearen Approximation

Unterrichtliche Erfahrungen

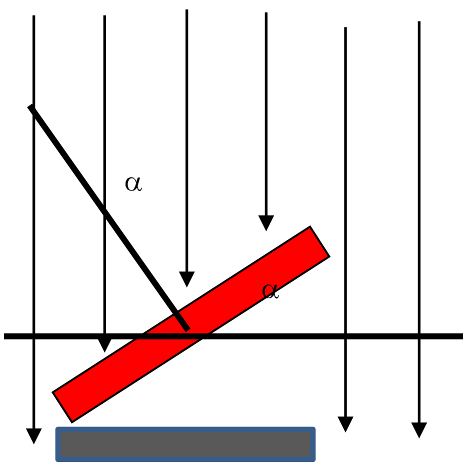
- Selbständig gefunden: Differenzenquotient (mehrere Varianten), Approximationsidee, Tangentenkonstruktion (teilweise)
- An der Murmelbahn typischerweise linksseitiger Grenzwert: $(f(x) - f(x-\Delta x)) / \Delta x$
- Der experimentelle Rahmen ermutig Näherungslösungen
- Beziehung punktueller Steigung (Tangente) und mittlerer Steigung (Sekante) wurde klar formuliert
- Ebenso Tangente als „Richtung der Kurve in diesem Punkt“
- Nichtlinearität des Lernprozesses: Viele Gruppen nahmen sich ein Experiment wiederholt vor, um später anderweitig gewonnene Erkenntnisse zu nutzen
- Hohe Motivation für die anschließende Theorie und Wertschätzung der Theorie:
- Nach Entwicklung des Ableitungskalküls sagte ein Schüler: „Ist ja geil, das [Steigungsbestimmung] können wir jetzt mit allen Funktionen machen!“

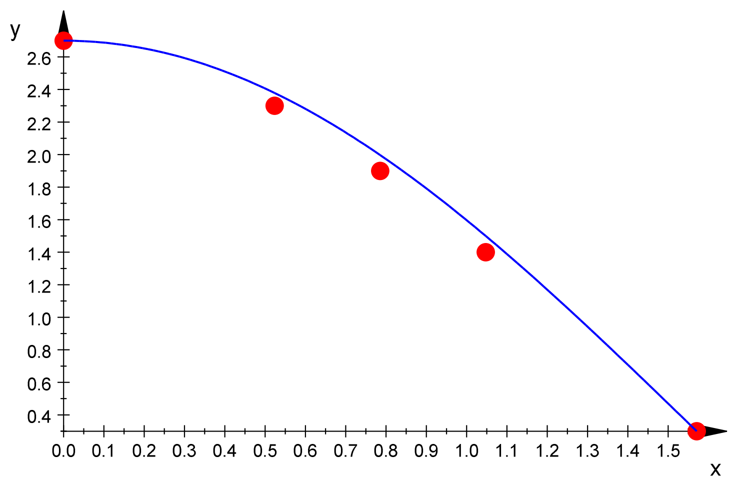
Weitere Experimente

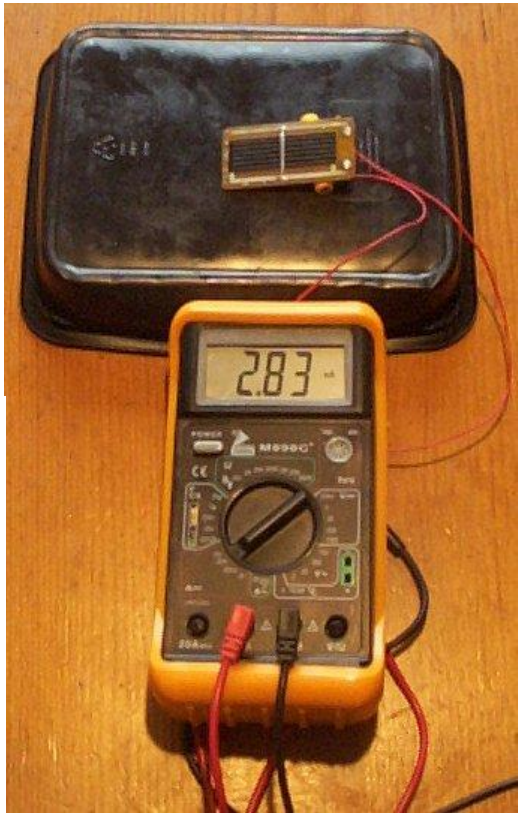
- Experimente und Analysis:
  - Propädeutik (Maus, Wippe, Basketball; kommt noch: Solarzelle)
  - Zentrum
  - Postpädeutik (Differentiale)

Jg. 9: Experiment: Strom einer Solarzelle

- Kurzschlussstrom als Maß für Lichtintensität folgt einem cos-Gesetz
- Erklärung durch Projektion
- Neubetrachtung in der Analysis. Rolle der linearen Approximation

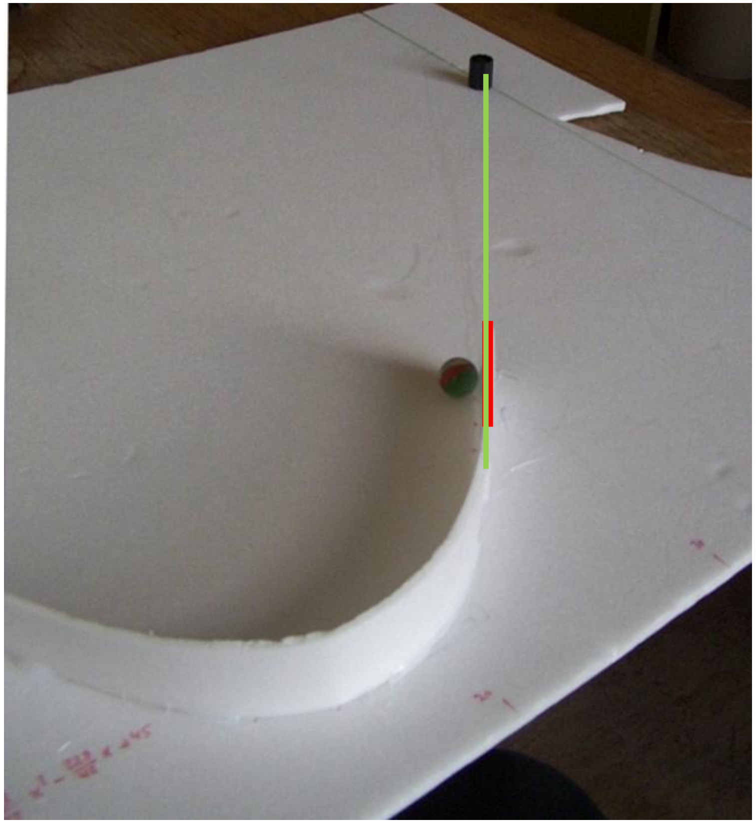






- Nutzen für die Analysis: Bei $\alpha \approx 0$ ändert eine kleine Änderung $\Delta\alpha$ fast nichts am Strom
- $y=f(x)$, dann $\Delta y \approx f'(x)\, \Delta x$

Analysis im Blick auf die Welt



- Die lokale Linearisierung ermöglicht …
- …bestmögliche **lineare** Prognose!
- Prognosen sind Modelle:
  - Kreismodell: Prognose einer Bewegung auf einem Kreis
  - Einfacher ist aber lineares Modell: Doppelte Änderung einer Größe ⇒ doppelte Änderung abhängigen Größe

Differentiale als Ausdrucksmittel

- Die große Breite der lokalen Linearisierung verlangt nach adäquaten Ausdrucksmöglichkeiten
- Differentiale!
- Keine originelle Idee:

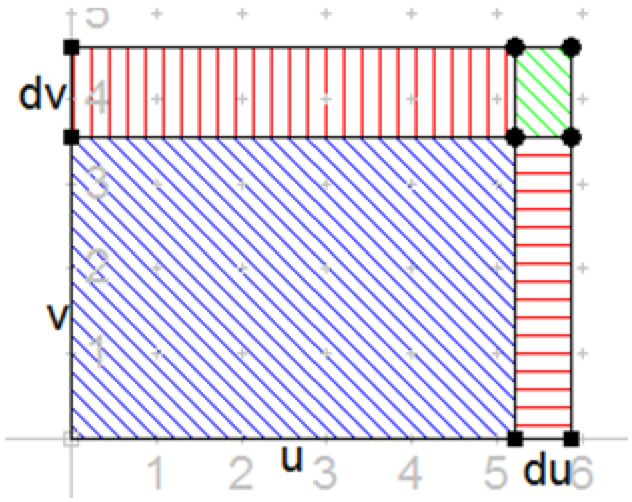
  „Eine erste Konsequenz des Unterrichtens solch ‚**beziehungshaltiger‘ Mathematik** ist die Verwendung des in den Anwendungen äußerst erfolgreichen Kalküls mit Differentialen (dx, dy, ...) und Größen, im Gegensatz zum abstrakten Trend in der heutigen Schulmathematik.“

  W. Blum: Ein Grundkurs in Analysis für die berufliche Oberschule. In: Die Berufsbildende Schule, Zeitschrift des Bundesverbandes der Lehrer an beruflichen Schulen, 27. Jahrgang, 1975, Heckners Verlag, Wolfenbüttel, S. 290-301

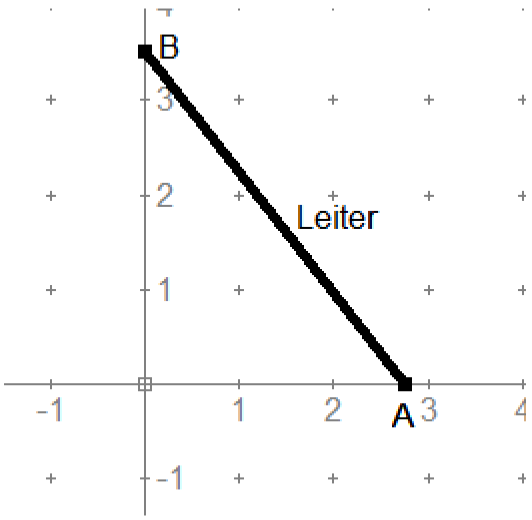
- Differentiale werden hier verstanden als
  - Variablen, die anderen Variablen zugeordnet sind
  - Endliche, also nicht infinitesimal kleine Größen
  - Definiert durch die intuitive Beziehung: Wenn x eine Größe ist, dann ist **dx eine bestmögliche lineare Prognose für eine Äderung von x**

Differentiale als Ausdrucksmittel

- Vielfältige Änderungsprozesse!
- Differential als lineare Prognose einer Änderung:
  - x ist eine Größe, dx lineare Prognose ihrer Änderung
- $x \to x+dx$, $y \to y+dy$, dann $x+y \to x+dx+y+dy$, also $d(x+y)=dx+dy$
- $d(k \cdot x)=k \cdot d(x)$
- Produkte:
- Also: $d(u \cdot v)=du \cdot v+u \cdot dv$
- Spezialfall $d(x^2)=2 \cdot x \cdot dx$



Differentiale als Ausdrucksmittel



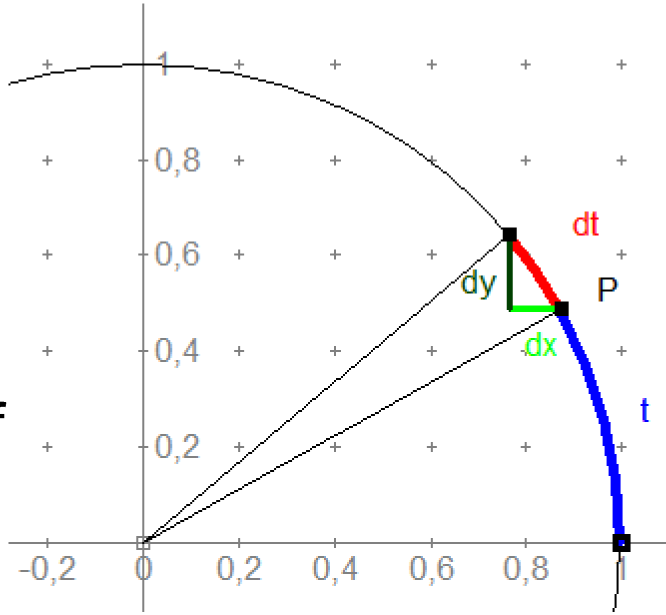
- Rutschende Leiter
- Endpunkte A=(a|0), B=(0|b),
- Länge $L^2=a^2+b^2$ ist konstant,
- Also: $0=d(L^2)=2\cdot a\cdot da+2\cdot b\cdot db$
- $a\cdot da+b\cdot db=0$ oder $a\cdot da=-b\cdot db$
- Das ist gut interpretierbar:
  - Wenn A nach rechts rutscht (da>0), geht B runter (denn dann ist db<0).
  - Wenn die Leiter sehr steil steht (b>>a), dann führen kleine da nur zu sehr kleinen db.

Differentiale als Ausdrucksmittel

- Beziehung zur Ableitung: Wenn x,y Koordinaten eines Kurvenpunktes sind, dann sind dx, dy Katheten eines Steigungsdreiecks, also $y=f(x) \Rightarrow dy=f'(x)\cdot dx$
- Damit schnell und mit Spaß rechnen: Lust am Kalkül!
- $y=\sqrt{x}$, $y^2=x$, $2\cdot y\cdot dy=dx$, $dy=dx/(2y)=dx/(2\sqrt{x})$
- $y=1/x$, $x\cdot y=1$, $x\cdot dy+dx\cdot y=0$, also: $dy=-dx/x^2$, analog allgemeine Quotientenregel
- $z=v(y)$, $y=u(x)$, mit $dz=v'\cdot dy$, $dy=u'\cdot dx$, dann ist $dz=v'\cdot u'\cdot dx$
- Fachlicher Nachteil: Existenz der Ableitung nicht gesichert (aber: Die meisten Bücher verzichten heute ohnehin auf ein Formalisierungniveau, das für einen Beweis nötig wäre!)
- Lokal linearisiert ist die Kettenregel gut verstehbar: Bei der Verkettung von linearen Funktionen multiplizieren sich die Steigungen: $u(x)=a\cdot x+b$, $v(x)=A\cdot x+B \quad \Rightarrow \quad v(u(x))=a\cdot(A\cdot x+B)+b=a\cdot A\cdot x+a\cdot B+b$
- Idee der lokalen Approximation: Wenn dx, dy klein sind, wird die Prognose besonders gut!

Differentiale als Ausdrucksmittel

- Bei der Kreisbewegung kommt alles zusammen:
- $x(t)=\cos(t)$, $y(t)=\sin(t)$, dann liegt $P(x|y)$ auf dem Einheitskreis.
- Also: $x^2+y^2=1^2$, also $xdx+ydy=0$, also $x^2dx^2=y^2dy^2$
- dt approximiert eine kleine Bogenlänge auf dem Einheitskreis also $dt^2=dx^2+dy^2$
- Multiplikation mit x^2 und rechnen: $x^2dt^2=x^2dx^2+x^2dy^2=y^2dy^2+x^2dy^2=(x^2+y^2)dy^2=dy^2$
- Interpretation $dy=xdt$, also $d(\sin(t))=\cos(t)dt$

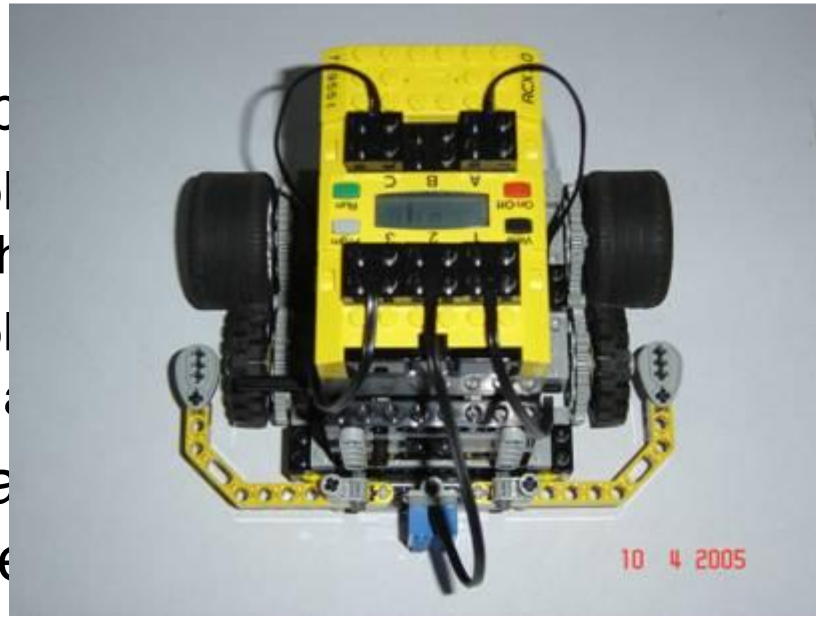


Differentiale als Ausdrucksmittel

- Weitere Verständnisbausteine:
  - Wenn man sich auf der x-Achse nach rechts bewegt ($dx>0$) und dabei y wächst ($dy>0$), ist der Graph monoton steigend und $dy/dx>0$
  - [und wenn bei Bewegung nach links ($dx<0$) y fällt ($dy<0$), ist ebenfalls $dy/dx>0$ – der Graph steigt]
  - An einem Maximum ändert sich y fast nicht, also ist dy klein und hat rechts und links unterschiedliches Vorzeichen, also: $dy=0$
  - Beim Kreis gilt: $ds=R d\varphi$, daraus Definition der Krümmung: $\kappa=1/R=d\varphi/ds$, auch für Funktionsgraphen, dort ist $\varphi=\arctan(f'(x))$ [daraus $d\varphi$] und $ds^2=dx^2+dy^2$

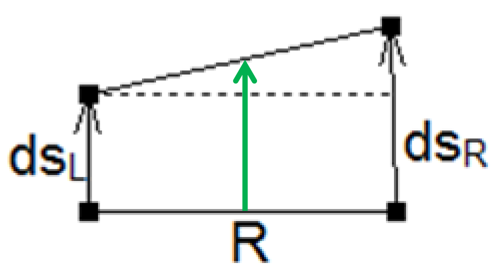
Beispiel: Roboter

- Zwei Rob
  - Der Rol äder, kennt also Umdreh und linken Rades
  - Der Rol urve geschoben und misst d
- Mathema ann aus den Drehunge rechnet werden?



$$ds = \frac{ds_L + ds_R}{2}$$

$$d\alpha = \frac{ds_R - ds_L}{R}$$



Wenn sich das Linke Rad mit U_L, das rechte mit U_R Umdrehungen pro Sekunde dreht, und der Radradius r ist, dann….

$ds_L = 2\pi r \cdot U_L \cdot dt$ und analog für Rechts

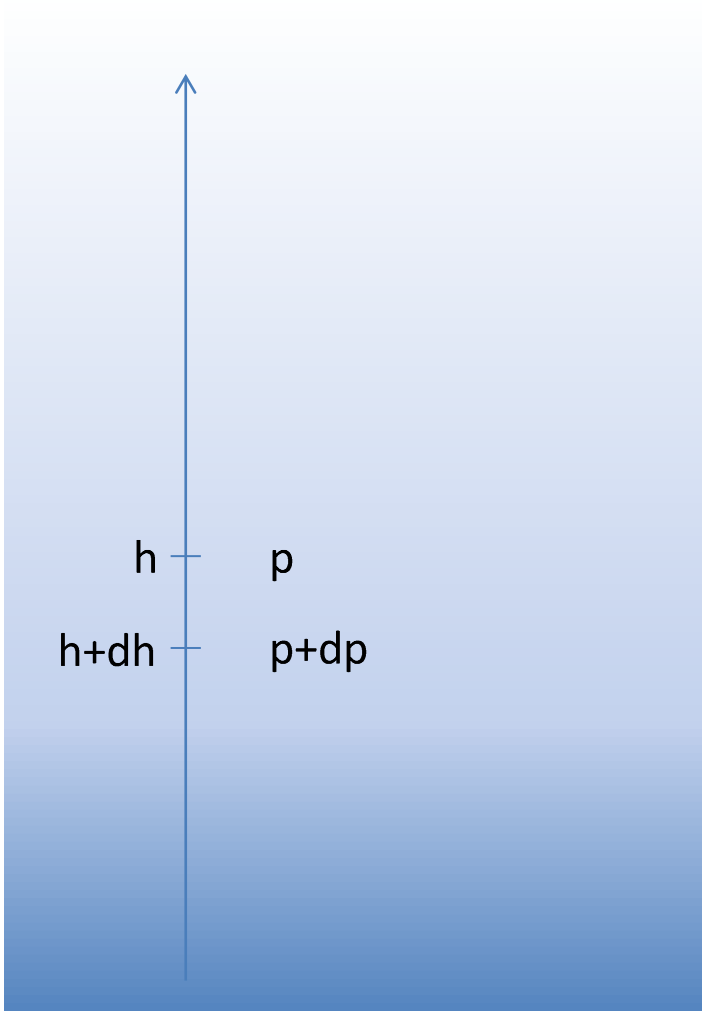
$dx = \cos(\alpha) \cdot ds$ und $dy = \sin(\alpha) \cdot ds$

Beispiele

- Was macht man damit?
- Differentialgleichungen lösen!
- Die Änderungen werden gut prognostiziert, wenn die Differentiale klein sind, also
  - dt klein wählen, z.B. dt=0.01Sekunden
  - Änderungen aus o.g. Formeln ausrechnen
  - Variablen ändern $x \rightarrow x+dy$ u.s.w.

Beispiele

- Bücher zu Physik, Technik, Computergrafik etc. bieten Unmengen von Beispielen, wo Analysis als Modellierungsmittel verwendet wird.
  - Leider sind viele recht anspruchsvoll
- Freudenthal [Mathematik als Pädagogische Aufgabe] plädiert ebenfalls für die Verwendung von Differentialen. Eines seiner Beispiele: Barometrische Höhenformel
- Wenn man nach unten geht, $dh<0$, wird der Druck um dp größer, weil die Luftschicht zwischen $h+dh$ und h zusätzlich drückt: $dp=-k\cdot p\cdot dh$
- Daraus $dp/p=-k\cdot dh \Rightarrow p=p_0\cdot e^{-kh}$



GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

Ende